

UNIVERSITÉ DE PROVENCE AIX-MARSEILLE I
Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Équilibre

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE

*Discipline : Systèmes Complexes : phénomènes hors
équilibre, micro et nano électronique*

École doctorale : Mécanique, Physique et Modélisation

par **Laurent LACAZE**

le 3 Décembre 2004

L'instabilité elliptique : exemples en aéronautique et en géophysique.

Directeurs de thèse :

M. Stéphane LE DIZÈS

M. Patrice LE GAL

JURY :

M. Pierre BRANCHER

M. Philippe CARDIN

Rapporteur

M. Patrick HUERRE

M. Patrice LE GAL

Directeur

M. Stéphane LE DIZÈS

Directeur

M. Maurice ROSSI

Rapporteur

M. GertJan F. VAN HEIJST

Avant de rentrer dans le vif du sujet, je tiens à souligner ces quelques lignes dédiées à des personnes sans lesquelles les pages qui suivront n'auraient sans doute pas été possibles.

Pour commencer, je voudrais tout particulièrement remercier Stéphane Le Dizès et Patrice Le Gal pour leur patience, leur dévouement et surtout pour avoir accepté de m'encadrer conjointement tout au long de cette thèse. Tant d'un point de vue scientifique qu'humain, leur complémentarité m'a aidé à avancer durant ces trois années. Le sujet qu'ils m'ont proposé m'a permis de dérober une faible part de leurs connaissances théoriques et expérimentales. Cette thèse est donc le fruit de leur générosité.

Je remercie les rapporteurs Philippe Cardin et Maurice Rossi pour la lecture approfondie de ce manuscrit ainsi que tous les membres du Jury : Patrick Huerre, GertJan F. Van Heijst (qui est venu de loin) et Pierre Brancher.

Merci à Paul Clavin pour son accueil au sein de l'IRPHE. Je pense également à toute l'équipe administrative et technique du labo : Fabrice, Jacky, Matthieu, Franck, Sylvain et Raymond pour leur savoir faire qui m'a beaucoup aidé pendant l'étude expérimentale, Lucienne pour sa patience avec mes feuilles de missions toujours incomplètes, Judith pour la biblio et son aide pour ma page web et Delphine pour son accueil toujours chaleureux et souriant.

Une thèse n'est rien sans ces rencontres qui peuvent permettre de s'oublier devant quelques apéros. Ces rencontres ont été riches en diversité et même si certaines ont été brèves, elles sont importantes pour moi. J'espère n'oublier personne et je vous les citerai par ordre chronologique d'apparition pendant ces trois années. Alors mille merci à Fabien (mon collègue de labeur), Anne, François G., Patrice, Céline, Jean-Philippe, Yoël, François C., Christophe L., Stéphane, Nico, Pierre, Xabier (le Petit Nice me manque déjà), Sébastien, Simona, Nicolas, Julien, Virginie, Sunita, Benjamin, Christophe A., Clément, Claire et le petit dernier François. Je pense aussi aux passages plus furtifs dans le labo, notamment les stagiaires de DEA, plus difficile à citer mais j'espère qu'ils se reconnaîtront.

Une belle et généreuse pensée à la formation Jazz la plus brillante de Marseille : Olivier et Maxime. Et tant que je suis à l'IUSTI, je n'oublierai pas les soirées jeux chez Nathalie.

Merci à ma famille et aux proches de Toulouse. Enfin, je tiens plus particulièrement à remercier et à dédier cette thèse à Maryline pour son soutien et sa patience dans les moments les plus difficiles.

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction générale	1
1.1 Des tourbillons en mécanique des fluides...	4
1.2 ... à l'analyse de l'instabilité elliptique pour des écoulements modèles	5
1.2.1 Aspect qualitatif lié à l'instabilité elliptique	7
1.2.2 Aspect quantitatif lié à la géométrie	7
1.3 Plan de l'étude	7
 partie I Instabilité elliptique en aéronautique : l'exemple des sillages d'avions	9
2. Introduction	11
2.1 Les tourbillons en aéronautique	11
2.2 La dynamique des tourbillons de sillage	12
2.3 L'effet d'un jet axial	14
2.4 Les modèles de tourbillons	14
2.4.1 Le tourbillon de Rankine	14
2.4.2 Le tourbillon de Batchelor	15
3. Tourbillon de Rankine	17
3.1 Introduction	17
3.2 Small strain analysis	18
3.3 Results	20
3.4 Conclusion	23
4. Tourbillon de Batchelor	27
4.1 Cadre de l'étude.	27
4.2 Analyse linéaire et non visqueuse du tourbillon de Batchelor.	29
4.2.1 Description des modes de Kelvin.	29
4.2.2 Atténuation non visqueuse : couche critique.	34
4.2.3 Analyse grand k	39
4.3 Instabilité elliptique du tourbillon de Batchelor.	43
4.3.1 Caractérisation des modes résonants.	44
4.3.2 Instabilité elliptique des modes neutres.	48
4.4 Sélection des modes les plus instables.	51
4.5 Comparaison DNS	56

5. Estimation asymptotique de l'instabilité elliptique	61
5.1 Cas non symétrique.	63
5.2 Cas symétrique	65
5.2.1 Terme d'instabilité.	66
5.2.2 Gaussien.	66
5.2.3 Modèle à deux rayons.	67
5.3 Discussion	69
6. Conclusion	71
6.1 L'instabilité de deux tourbillons co-rotatifs	71
6.2 Développement non linéaire de l'instabilité elliptique	72
partie II Instabilité elliptique en géophysique : l'exemple des noyaux planétaires	73
7. Introduction	75
7.1 Le champ magnétique terrestre	75
7.1.1 Découverte de la structure interne de la Terre	75
7.1.2 Observations du champ magnétique.	77
7.1.3 La convection : moteur de la dynamo ?	79
7.2 Les ondes inertielles.	81
7.2.1 La précession	81
7.2.2 L'instabilité elliptique	82
8. Instabilité elliptique dans une sphère en rotation	85
8.1 Introduction	85
8.2 Stability analysis of the flow	86
8.2.1 Inertial waves in a sphere	86
8.2.2 Elliptical instability	88
8.2.3 Nonlinear evolution of the spin-over mode	94
8.3 Experimental results	97
8.3.1 Experimental set-up	97
8.3.2 Visualisation of the instability	98
8.3.3 Video analysis of the instability near threshold	100
8.3.4 Secondary instability and intermittent regime	105
8.4 Conclusion	105
9. Instabilité inertielle : analogie fluide-solide	109
9.1 Du fluide au solide.	109
9.2 Equations d'Euler : solide et fluide.	109
9.3 Expérience d'un fluide non visqueux ?	113
9.4 Conclusion	115
10. Instabilité elliptique dans une coquille sphérique	117
10.1 Introduction	117
10.2 Linear stability analysis	119
10.2.1 Inviscid theory	119
10.2.2 Viscous effect	124

10.3	Experimental results	125
10.3.1	Experimental techniques	125
10.3.2	Visualizations and measurements	127
10.4	Conclusion	133
11.	Conclusion	135
11.1	Discussion	135
11.2	Perspectives	138
11.2.1	Dynamique non linéaire : chaos ?	138
11.2.2	Champ magnétique induit	140
	Annexe	143
A.	Description asymptotique des modes de Kelvin d'un tourbillon	145
A.1	Introduction	145
A.2	Basic flow and perturbation equations	147
A.3	Large k asymptotic analysis	148
A.3.1	Core modes	151
A.3.2	Ring modes	155
A.4	Applications	158
A.4.1	The Gaussian vortex without axial flow (Lamb vortex)	158
A.4.2	The Gaussian vortex with axial flow (Batchelor vortex)	168
A.5	Conclusion	177

1. INTRODUCTION GÉNÉRALE

Cette étude s'intéresse à la dynamique rotationnelle riche de par sa diversité dans nombres de systèmes physiques. Les mouvements de rotation sont, en effet, aussi bien présents dans la mécanique des fluides - qui nous intéressera par la suite - que dans la dynamique liée aux solides. De tels systèmes peuvent parfois exhiber des dynamiques surprenantes : la toupie pirouette en est un exemple pour les solides en rotation. Cette toupie peut être modélisée par une sphère dont le centre de gravité est excentré. Posé sur une table, cet objet se stabilise lorsque le centre de gravité est aligné verticalement avec le centre de la sphère et en dessous de celui-ci (figure 9.3 (a)). Si maintenant la toupie est mise en rotation autour de l'axe vertical, elle se retourne et la position d'équilibre est alors inversée (centre de gravité au dessus du centre de la sphère) (figure 9.3 (b)).

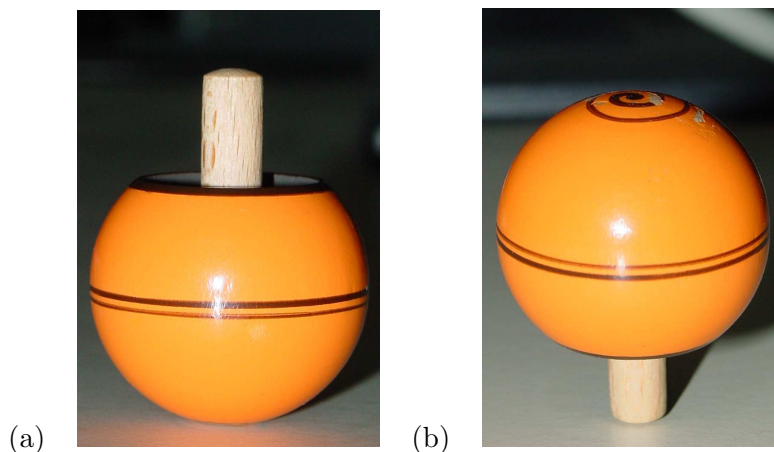


Figure 1.1: Visualisation des positions d'équilibre de la toupie pirouette. (a) sans rotation, (b) avec rotation.

Cette petite expérience étonnante met en évidence le manque d'intuition vis à vis de la force de Coriolis qui est associée à tout mouvement de rotation.

Nous allons plus particulièrement nous intéresser dans la suite du développement aux écoulements fluides en rotation et à leur stabilité, l'objectif de la thèse étant l'étude théorique et expérimentale de l'instabilité elliptique de tels écoulements. Cette instabilité est induite par la déformation elliptique des lignes de courant circulaires caractéristiques d'un écoulement tournant. Deux configurations d'écoulement tournant vont nous intéresser par la suite. La première correspond à la dynamique des tourbillons caractérisés par une vorticité localisée en espace dans un cœur cylindrique : écoulement dit ouvert. A l'extérieure du cœur la vorticité de l'écoulement n'est pas nécessairement nulle mais peut être négligée vis-à-vis de celle régnant dans le cœur. La deuxième configuration est associée à l'écoulement d'un fluide dans un container axisymétrique en rotation : écoulement dit confiné. L'écoulement est dans ce cas une rotation solide et le fluide se comporte comme une masse

solide. En particulier, nous nous intéresserons à cet écoulement en géométrie sphérique. Ces études font suite à des études similaires qui avaient considérés le cas de la géométrie cylindrique comme modèle de dynamique tourbillonnaire [23].

1.1 Des tourbillons en mécanique des fluides...

En mécanique des fluides, le problème de transition d'un écoulement laminaire vers la turbulence fait l'objet de nombreuses études depuis les expériences de Reynolds (1883) sur l'écoulement d'un fluide dans un conduit cylindrique. A l'heure actuelle, ce phénomène de transition est encore mal compris, la difficulté étant liée à la résolution du terme non linéaire de ces équations. En revanche, des études approfondies sur la stabilité linéaire des écoulements primaires (laminaires) ont souvent mis en évidence l'apparition de tourbillons dans les écoulements transitoires. De plus, des observations récentes ont montré que ces structures tourbillonnaires étaient encore présentes sous formes de filaments tourbillonnaires dans les régimes turbulents développés [16]. On peut par exemple évoquer le cas d'écoulements cisailés simples dont la première bifurcation ¹ donne lieu à une rangée de tourbillons (voir [100] pour une revue). Leur dynamique semble jouer un rôle fondamental dans la transition vers la turbulence de tels écoulements. D'autres systèmes comme les couches de mélange, la convection de Rayleigh-Bénard, l'instabilité de front, l'écoulement de Taylor-Couette, les sillages d'objets (profilés ou non), *etc...* peuvent également transiter vers un écoulement constitué de tourbillons. Dans la plupart des cas, ces tourbillons sont formés par une concentration de la vorticité présente dans l'écoulement primaire. En revanche, le processus de déstabilisation de l'écoulement primaire et donc de formation de ces tourbillons peut être diff  rent selon l'écoulement (viscosité, force centrifuge, cisaillement, *etc...*).

Un exemple de formation de tourbillons par la bifurcation d'un écoulement autour d'un obstacle (allée de Bénard-Von K  rm  n) est présenté sur la figure 1.2 (a). Comme nous pouvons le voir sur la figure 1.2 (b), un tel phénomène peut être observé dans les écoulements atmosphériques autour d'une   le.

La dynamique tourbillonnaire associée à ce type d'écoulement peut être complexe d'où l'intérêt de considérer des problèmes modèles, par exemple constitués d'un seul tourbillon. Comme Pullin & Saffman [99] l'on fait remarquer, une telle approche peut également être nécessaire pour mieux comprendre la dynamique des structures tourbillonnaires présentes dans les écoulements turbulents [16]. Ainsi, l'étude de stabilité d'un tourbillon isolé a été l'objet de nombreuses études. Nous renvoyons le lecteur au livre de Saffman [107] pour une revue. Des critères de stabilité d'un tourbillon vis-à-vis de faibles perturbations ont été décrits et les écoulements que nous nous proposons d'étudier ici sont stables à la vue de ces critères.

¹ par bifurcation, on entend la transition d'un régime dynamique vers un autre, induite par la déstabilisation du régime initial

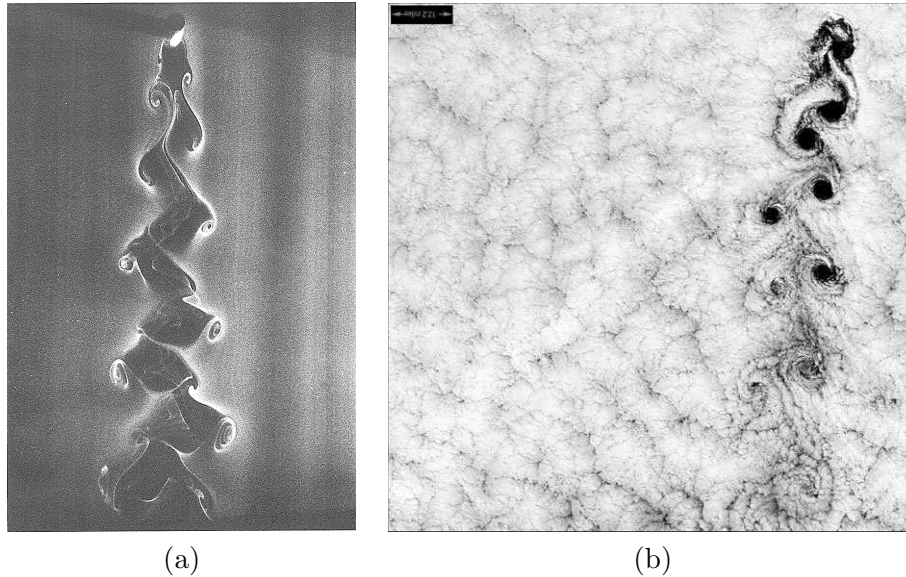


Figure 1.2: (a) Allée de Von Kármán derrière un cylindre (visualisation par méthode électro-chimique [72]). (b) Allée de Bénard-Von Kármán dans l'atmosphère induit par la présence d'un île (Selkirk Island (1999) : Landsat-7 satellite).

1.2 ... à l'analyse de l'instabilité elliptique pour des écoulements modèles

Lors de la transition, les écoulements constitués de tourbillons présentés ci-dessus peuvent, comme nous l'avons mentionné, se déstabiliser pour être finalement caractérisés par la formation de petites structures caractéristiques de la turbulence. Se pose alors la question de l'origine de cette instabilité. Une des hypothèses envisageable est liée au projet d'étude que nous nous proposons par la suite. La configuration de ces écoulements peut être caractérisée par la déformation de chaque tourbillon ; cette déformation serait alors induite par la superposition du champ de vitesse propre au tourbillon et de celui induit par les tourbillons voisins. Selon le type d'écoulement et la position des tourbillons les uns par rapport aux autres, la déformation propre d'un tourbillon peut être très différente.

Pour simplifier ce problème, on peut s'intéresser au cas le plus simple de deux tourbillons modèles, dont les axes de rotations sont parallèles, qui évoluent dans un milieu stable. Dans ce cas particulier, chaque tourbillon induit sur l'autre un champ de déformation bidimensionnel qui rend leurs lignes de courant elliptiques (figure 1.3). L'analyse linéaire de la dynamique de ce tourbillon non axisymétrique modèle montre alors qu'il se déstabilise et que cette déstabilisation se caractérise par une déformation tridimensionnelle du cœur.

Ce type d'instabilité, forcée par la déformation d'un écoulement en rotation, peut amener à considérer d'autres configurations. Les écoulements rotationnels d'un fluide peuvent par exemple être générés par la rotation

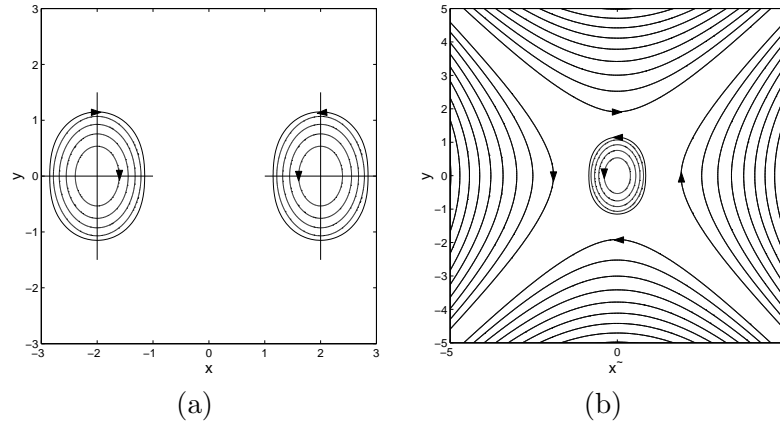


Figure 1.3: (a) déformation elliptique des lignes de courant d'un système de tourbillon binaire, (b) modélisation du champ de contrainte induit par un tourbillon sur l'autre.

d'une paroi solide : écoulement dit confiné. Ceci est le cas, en particulier, du noyau liquide des planètes telluriques (Terre, Mars, Mercure, *etc...*). De plus, des observations récentes des satellites Joviens (Io, Ganymède, Europa) ont montré également que ces astres sont de structures équivalentes aux planètes telluriques. Dans ce cas, les effets de marées induits par le champ de gravitation d'astres avoisinants peuvent avoir des répercussions sur la dynamique du noyau liquide identiques à celles du champ d'étirement sur les tourbillons décrites précédemment (figure 1.4). Cette nouvelle application impose donc l'étude de l'instabilité elliptique dans des domaines très variés de la mécanique des fluides.

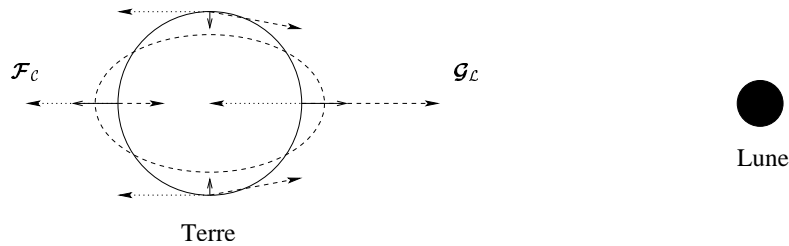


Figure 1.4: Effet de marée (schématisé par les vecteurs en 'traits pleins'), induit par le champ de gravitation de la Lune \mathcal{G}_L (Force différentielle schématisée par les vecteurs en 'traits discontinus') et la force centrifuge \mathcal{F}_c liée à la rotation du couple Terre-Lune (force constante : 'pointillé'), sur le Manteau terrestre.

Ces deux applications (les tourbillons et les noyaux liquides de planètes) semblent fondamentalement différentes, pourtant l'aspect hydrodynamique et en particulier l'instabilité lié au champ d'étirement de ces deux problèmes peuvent être considérés de la même manière.

1.2.1 Aspect qualitatif lié à l'instabilité elliptique

Une très belle approche fondamentale modélisant cette dynamique permet de réunir les deux géométries mentionnées précédemment dans une même thématique de la mécanique des fluides. Cette méthode initialement développée par Bayly [8] (pour confirmer les résultats numériques de Pierrehumbert [97]) dans le cas d'un tourbillon bidimensionnel infini et de forme elliptique s'appuie sur une méthode de type locale. Toute perturbation est supposée se développer sur une famille d'ondes inertielles de courtes longueurs d'ondes associées à un écoulement de rotation solide. Ces ondes sont associées à la force de Coriolis, comme les ondes de surface le sont à la gravité ou les ondes acoustiques à la variation temporelle de densité. Le couplage de certaines de ces ondes, engendré par la non axisymétrie du tourbillon induit par le champ de déformation, peut rendre l'écoulement instable. Ces méthodes de type local ont ainsi mis en évidence l'instabilité elliptique en considérant la forme elliptique de chaque ligne de courant. Ainsi, le mécanisme d'instabilité dans les deux géométries que nous allons étudiés est équivalent. En revanche, cette méthode est valide lorsque les longueurs caractéristiques liés aux ondes sont petites vis-à-vis de la taille du domaine d'étude.

1.2.2 Aspect quantitatif lié à la géométrie

Lorsque la géométrie de l'écoulement est prise en considération, *i.e* lorsque les longueurs caractéristiques d'une onde sont du même ordre que celles du domaine considéré, l'approximation de Bayly n'est a priori plus valide. Dans ce cas, les solutions de perturbations linéaires doivent satisfaire une relation de dispersion liée aux conditions limites. Ces solutions appelées modes de Kelvin [47] peuvent également résoner avec le champ de déformation. Dans ce cas, la géométrie de l'écoulement devient fondamentale et les deux études que nous nous proposons vont alors se différencier.

1.3 Plan de l'étude

Le manuscrit est organisé de la façon suivante. Dans un premier temps nous allons nous intéresser au développement de l'instabilité elliptique d'un tourbillon avec jet axial. Cette étude est motivée par des applications à l'aéronautique et constitue la première partie de la thèse. Ensuite, le cas de la géométrie sphérique comme application à la dynamique du noyau liquide de certaines planètes sera considéré dans une deuxième partie.

Première partie

**INSTABILITÉ ELLIPTIQUE EN
AÉRONAUTIQUE : L'EXEMPLE DES
SILLAGES D'AVIONS**

2. INTRODUCTION

2.1 Les tourbillons en aéronautique

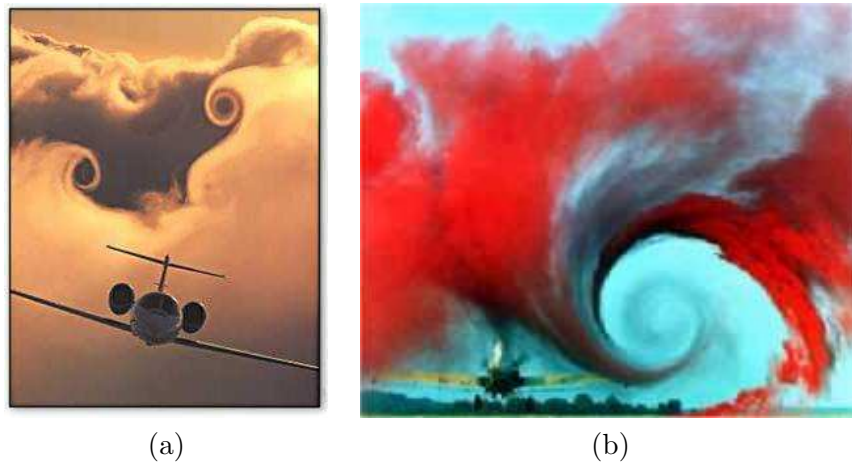


Figure 2.1: Visualisations des tourbillons de sillage d'avion créés en bout d'aile : (a) photo Paul Bowen ; (b) Source NASA Langley Research Center - EL 1996 00130.

Le sillage d'un avion est caractérisé par différents tourbillons orientés dans le sens de vol de l'avion et induits par la portance de celui-ci (voir figure 2.1). Deux tourbillons principaux intenses et contra-rotatifs sont formés en bout d'aile. Ces tourbillons sont mis en évidence figure 2.1 soit par la déformation de nappes de nuage soit par ensemencement de l'écoulement avec une fumée colorée. Lors des phases d'atterrissage et de décollage, des tourbillons secondaires moins intenses et induits par les volets sont également présents dans le sillage. Le formalisme associé à la présence de ces tourbillons de sillage a été initié au début des années 1930 avec les travaux de Kaden (1931) sur la formation en spirale d'un tourbillon par enroulement d'une nappe de vorticité semi-infini (ligne portante de Prandtl). En particulier, Betz [11]  termina les rapports entre la portance de l'avion et la structure des tourbillons observés après l'enroulement des nappes de vorticité. On peut en particulier noter que plus un avion est lourd plus les tourbillons cr s dans son sillage sont intenses. Il existe de nombreux travaux sur la structure des sillages d'avions et leur formation : le lecteur peut se référer à l'article de Spalart [113] pour une revue.

Les tourbillons de sillage d'avion ont été par le passé la cause d'accidents aéronautiques. L'intensité d'un tourbillon dépendant de la portance de l'aile, un petit avion pénétrant dans le sillage d'un gros porteur subit, alors, un

moment de roulis très important qui peut le retourner. Ces incidents se sont produits principalement dans les aéroports et imposèrent la mise en place de grilles de fréquence de décollage et d'atterrissage dépendants de la taille des avions. La destruction de ces tourbillons devient alors un enjeu économique important pour les grands aéroports qui voient le trafic augmenter sans cesse. Pour cela plusieurs études ont été menées et il semble à l'heure actuelle que le moyen le plus économique (notamment au niveau de la traînée de l'avion) pour détruire ces tourbillons est de forcer leur déstabilisation. La déstabilisation de ces grosses structures tourbillonnaires pourrait alors engendrer la formation de plus petites structures qui se dissipent plus rapidement.

2.2 La dynamique des tourbillons de sillage

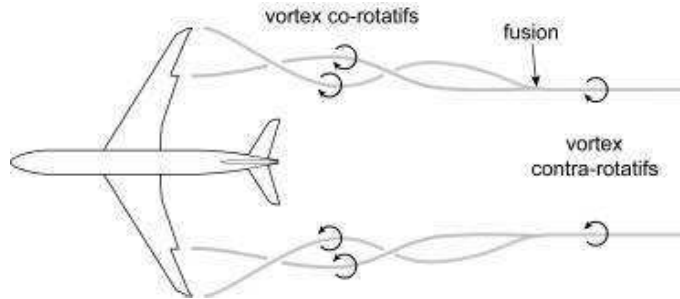


Figure 2.2: Schématisation d'un sillage d'avion constitué de deux tourbillons principaux et deux tourbillons secondaires créés par les volets.

Le sillage d'un avion peut être séparé en deux grandes parties : le sillage proche et le sillage lointain. Tandis que le sillage proche est caractérisé par différents tourbillons (principaux et secondaires) induits par l'enroulement de nappes de vorticité, le sillage lointain n'est constitué que de deux tourbillons intenses contra-rotatifs. En effet, les tourbillons de proche sillage s'apparient pour certains d'entre eux ou se décomposent pour d'autres pour ne donner lieu qu'à deux tourbillons contra-rotatifs. Une schématisation des tourbillons d'un sillage d'avion est présentée sur la figure 2.2.

Il existe de nombreuses études sur la dynamique de ces tourbillons, notamment depuis l'article de Crow [19] qui a mis en évidence une instabilité à grande longueur d'ondes de deux tourbillons filaments contra-rotatifs. Cette instabilité engendre la formation d'anneaux de vorticité comme présentée sur la figure 2.3. Nous pouvons observer cette instabilité dans le sillage d'un avion lorsque les conditions météorologiques sont favorables.

Moore & Saffman [89, 90] et Tsai & Widnall [120] ont modélisé les deux tourbillons contra-rotatifs du sillage d'avion par un tourbillon isolé dans un champ d'étirement. En plus de l'instabilité à grande longueur d'onde, il a été mis en évidence une instabilité elliptique à courte longueur d'onde caractérisée par la résonance de deux modes propres du tourbillon [47] avec le champ d'étirement. Sur la figure 2.4 est présenté une visualisation de

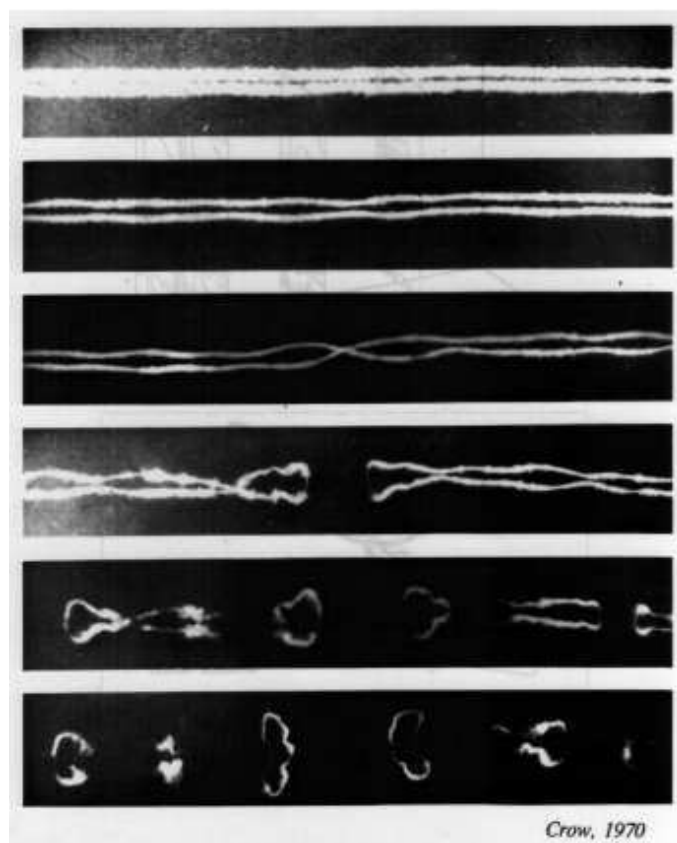


Figure 2.3: Visualisations de l'instabilité de Crow pour deux filaments de vorticité contra-rotatifs.

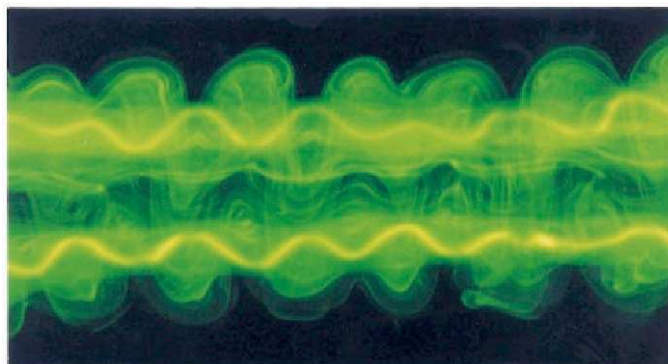


Figure 2.4: Visualisations de l'instabilité elliptique à courte longueur d'onde pour deux tourbillons contra-rotatifs cr s par le mouvement de deux pales dans une cuve d'eau. Visualisation au colorant. D'après Leweke & Williamson [77].

deux tourbillons contra-rotatifs sur lesquels se sont développés l'instabilité elliptique à courte longueur d'onde [77].

2.3 L'effet d'un jet axial

Les tourbillons de sillage d'avions sont de plus caractérisés par une composante de jet dans le cœur. Ce jet intense en sillage proche est toujours présent en sillage lointain mais son amplitude par rapport à la vorticité du tourbillon est plus faible. Comme décrit par Batchelor [7], cette composante de jet est générée par la variation du rayon du tourbillon lors de l'enroulement de la nappe de vorticité.

L'étude d'un jet axial dans un tourbillon n'a généralement été abordée que dans le but de décrire l'instabilité de Kelvin-Helmholtz lié au cisaillement axial induit par le jet. Cette instabilité est similaire à l'instabilité de couche de mélange qui est due au fort cisaillement créé par la variation rapide de vitesse sur une petite échelle de longueur. Dans le cas du tourbillon de Batchelor, le paramètre de contrôle de cette instabilité est le rapport entre la vitesse maximale du jet et la vorticité maximale du tourbillon. Pour des profils axisymétriques de structures radiales gaussiennes, cette instabilité n'apparaît que pour des valeurs de vitesses de jets suffisamment grandes devant la vorticité axiale du tourbillon. Cette valeur est supérieure à celle généralement mesurée dans le sillage des avions de transport. En revanche, pour des profils d'ailes différents (ailes à forte flèche par exemple), la composante de jet peut devenir largement supérieur à la valeur critique d'apparition de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Dans ce cas particulier, l'instabilité de Kelvin-Helmholtz peut se développer et, dans certaines configurations, un éclatement tourbillonnaire peut même apparaître très proche de l'avion (notamment dans le cas d'aile Delta); la portance de l'avion chute alors brutalement à cause de la destruction des tourbillons de sillage qui, pour ces avions, jouent un rôle fondamental quant à la portance (phénomène de sustentation).

Nous nous proposons dans cette partie d'étudier la stabilité d'un tourbillon avec un jet axial faible soumis à un champ d'étirement : *i.e.* pour lequel l'instabilité de Kelvin-Helmholtz ne peut être présente pour des profils Gaussiens.

2.4 Les modèles de tourbillons

Dans cette section nous allons rapidement présenter les deux modèles de tourbillons que nous nous proposons d'étudier dans la suite.

2.4.1 Le tourbillon de Rankine

Le tourbillon de Rankine est le modèle le plus simple de tourbillon pour lequel un diamètre de cœur fini est considéré. Il est caractérisé par une vorticité ω_0 constante contenue dans un tube de rayon a . A l'extérieur de ce tube, la vorticité est nulle. Ce tourbillon est donc une répartition de vorticité singulière comme l'est un filament tourbillonnaire. Dans ce cas, la taille finie

du cœur permet de définir une famille de modes de structures spatiales variées. Ceci permet de tenir compte des effets de volume de tourbillon qui sont également présents pour des profils de tourbillons plus réalistes. Ce modèle présente l'avantage de pouvoir être étudié analytiquement de part la simplicité des équations qui y sont associées. Pour un tel modèle, l'effet d'un jet axial W peut être modélisé par un profil singulier similaire au profil de vortacité [119, 34].

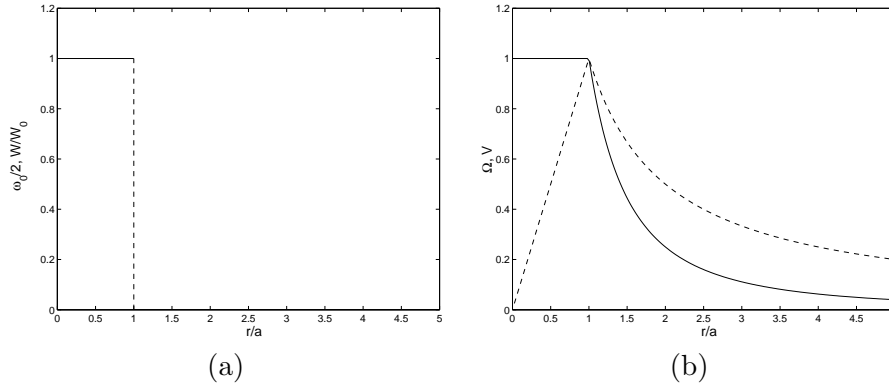


Figure 2.5: Profils de Rankine : (a) vortacité ω_0 et vitesse axiales W (W_0 étant la vitesse axiale au centre), (b) 'trait continue' vitesse angulaire Ω et 'trait discontinu' vitesse azimutale V .

2.4.2 Le tourbillon de Batchelor

Le tourbillon de Batchelor est quant à lui défini par des profils de vortacité et de jet axial Gaussiens. Ce profil est solution des équations d'Euler et il est également une solution autosimilaire des équations de Navier-Stokes. Ce profil est de plus la solution de convergence de tout tourbillon stable évoluant dans un fluide visqueux.

Le tourbillon de Batchelor est plus réaliste que le modèle du tourbillon de Rankine mais tout développement analytique est plus limité. Une analyse préliminaire du tourbillon de Rankine permet donc de simplifier le problème tout en gardant un effet de taille de cœur.

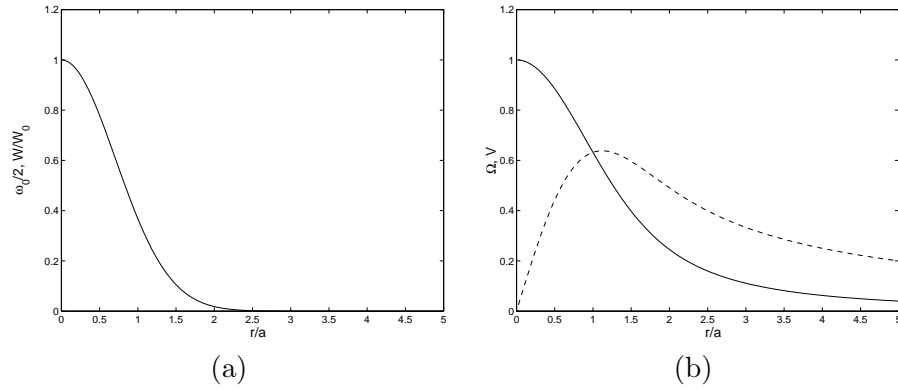


Figure 2.6: Profils de Batchelor : légende identique à la figure 2.5.

Cette première partie va donc se focaliser sur l'étude de stabilité de ces deux profils de tourbillon lorsqu'ils sont soumis à un champ d'étirement stationnaire.

3. TOURBILLON DE RANKINE

Ce chapitre est constitué d'un article accepté (publication en Janvier 2005) dans Physics of Fluids : Lacaze L., Birbaud A.-L. and Le Dizès S., "Elliptic instability in a Rankine vortex with axial flow" [57].

Abstract

The elliptic instability of a Rankine vortex with axial flow subject to a weak strain field perpendicular to its axis is analyzed by asymptotic methods in the limit of small strain rate. General unstable modes associated with resonant Kelvin modes of arbitrary azimuthal wavenumbers are considered. Both the effects of axial flow and viscosity are analyzed in details.

3.1 Introduction

A stable vortex can become unstable when it is placed in a strain field that deforms its streamlines into ellipses. This so-called elliptic instability is due to the resonance of two Kelvin modes with the external strain field associated with the elliptic deformation. The aim of this paper is to study the effect of an axial flow on the characteristics of this instability.

The elliptic instability in a vortex without axial flow has already been the interest of many works. It has also been observed in various geometries, which could be relevant either to geophysical applications, or industrial issues. The reader is referred to the review of Kerswell [49] for a list of references. The elliptic instability is also present in open flows. In particular, it plays an important role in the dynamics of vortices generated by aircraft. In the aeronautical context, the elliptic deformation of the vortex is due to the strain field induced by the other vortices present in the wake. So far, the elliptic instability has permitted to explain the three-dimensional transition in both counter-rotating vortex pairs [77] and co-rotating vortex pairs [87]. Several analytical models have been constructed [112, 70, 29] but none of them contains the axial flow that should be present in airplane trailing vortices [7, 113].

In the present work, we analyze the effect of such an axial flow. We consider an idealized vortex model (the Rankine vortex) in order to analyze this effect by semi-analytical methods. The stability properties of the Rankine vortex with axial flow have been calculated by Lessen *et al.* [75] and Loiseleux *et al.* [119]. Without external strain field, they have shown that this vortex possesses an unstable mode and infinitely many neutral Kelvin

modes. Here, our goal is to consider these neutral modes and to analyze the conditions under which they can be resonantly excited by a strain field. Our approach follows the asymptotic analysis developed in Tsai & Widnall [120], Moore & Saffman [90], Eloy & Le Dizès [25] and Fukumoto [33]. The small parameter of the analysis is the ratio of the external strain rate by the vorticity.

Moore & Saffman [90] also considered the effect of a weak axial flow on the elliptic instability characteristics. But their analysis was limited to axial flow parameter of the order of our small parameter. They showed, in a general setting, that weak axial flow tends to create a stabilizing frequency detuning if the axial wavenumber is fixed. Contrarily to Moore & Saffman analysis, in the present study, the axial flow is not small. Moreover, the characteristics of the resonant modes are allowed to vary with the axial flow parameter such that the detuning effect discovered by Moore & Saffman [90] is not present.

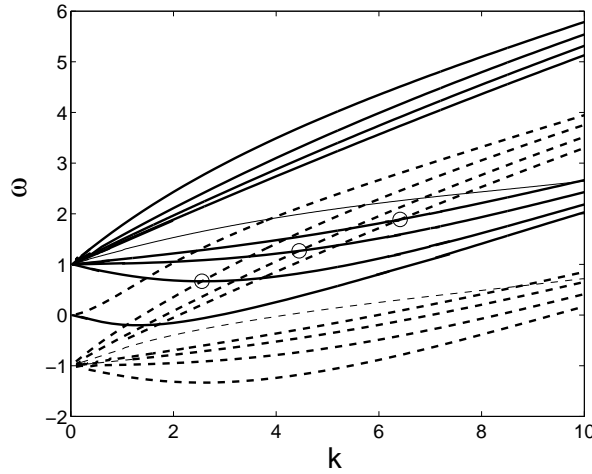


Figure 3.1: Eigenfrequencies versus k for $m = -1$ (dashed line) and $m = 1$ (line) for an axial parameter $W_0 = 0.3$. The thin lines represent the real part of the frequency of the Kelvin-Helmholtz mode. The Kelvin-Helmholtz mode is here always unstable.

3.2 Small strain analysis

We consider a basic flow whose velocity field in cylindrical coordinates (r, θ, z) is of the form

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (0, r, W_0) + \varepsilon(-r \sin(2\theta), -r \cos(2\theta), 0) \quad , r \leq 1, \\ \mathbf{U} &= (0, \frac{1}{r}, 0) + \varepsilon(-\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r^3}) \sin(2\theta), \\ &\quad -\frac{1}{2}(r - \frac{1}{r^3}) \cos(2\theta), 0) \quad , r > 1, \end{aligned} \quad (3.1)$$

up to $O(\varepsilon)$ terms, where ε is the small strain rate. The leading order terms correspond to the Rankine vortex with constant axial flow. Here, the vortex radius and the angular velocity in the core have been chosen to non-dimensionalize all the quantities. The parameter W_0 measures the strength

of the axial flow. It is the inverse of the so-called Swirl number. The order ε terms in (3.1) represent the small strain field which elliptically deforms the vortex. As shown by Tsai & Widnall [120] and Moore & Saffman [90], it is these terms which are the source of instability. The mechanism is the following. Two Kelvin modes associated with the leading order flow can resonate with the weak strain field. This resonance occurs if two normal modes defined by their frequency ω , axial wavenumber k and azimuthal wavenumber m satisfy the following conditions :

$$\omega_2 = \omega_1, \quad k_2 = k_1, \quad m_2 - m_1 = \pm 2. \quad (3.2)$$

It leads to an inviscid temporal growth of the two coupling mode amplitudes with a characteristic growth rate proportional to ε . Normal modes for the Rankine vortex with axial flow can be calculated explicitly (see for instance [119]). As for the Rankine vortex without axial flow, there exist an infinity of non-viscous neutral modes which are associated with the fluid rotation [34]. Their frequencies are such that

$$-2 < \omega - m - kW_0 < 2.$$

There exists an additional mode which is due to the axial velocity jump across the vortex core boundary (see figure 3.1). This mode is associated with the Kelvin-Helmholtz instability : its growth rate for large axial wavenumber k is $\sigma \sim W_0 k$. This Kelvin-Helmholtz mode is however strongly affected by the Kelvin neutral modes for small k . As shown by Loiseleux *et al.* [119], it can even become neutral, in small wavenumber intervals satisfying $k < k_s(m)$ if W_0 is above a critical value $W_{0s}(m)$. Loiseleux *et al.* [119] provided $k_s(-1)$ and $W_{0s}(-1)$. Values of $k_s(m)$ and $W_{0s}(m)$ are given in table 3.2 for other m . For a given m , if $k < k_s(m)$ and $W > W_{0s}(m)$, the neutrally stable Kelvin-Helmholtz mode becomes a new candidate for resonance. Yet, we have found that it never satisfies the resonance condition (3.2) with any other modes whatever m . Thus, it could not intervene in the elliptic instability.

When the Kelvin-Helmholtz mode is unstable (in particular if $k > k_s$ or $W < W_{0s}$), it cannot be considered as a possible mode in the resonance condition because this condition only applies to neutral modes. For this reason, it has to be dismissed from the analysis. Moreover, it is worth mentioning that this unstable mode, which is obtained here for small axial flow, is not expected to be always present in other vortices. For more realistic vortices such as the Batchelor vortex (Gaussian profiles), non-viscous instability only occurs when the axial flow is sufficiently large ($W_0 \geq 0.6$) (see [84]). This means that for the Batchelor vortex there is no unstable Kelvin-Helmholtz modes for small axial flow. This provides a physical justification for dismissing the unstable Kelvin-Helmholtz mode from the analysis.

As shown by Eloy & Le Dizès [25] for the Rankine vortex without axial flow, a combination of two neutral modes satisfying the condition of resonance is always destabilized by the strain field. The growth rate can be calculated by a perturbation method. The method is classical and the analysis of Eloy & Le Dizès [25] can be applied to the present case almost

without any modification. The final result is an expression for the growth rate σ which reads :

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \sqrt{\zeta^2 + \frac{1}{4}(\nu_{m_1} - \nu_{m_2})^2} - \frac{1}{2}(\nu_{m_1} + \nu_{m_2}). \quad (3.3)$$

In this expression, ζ is the destabilizing term which is associated with the coupling of the resonant mode with the strain field. It provides the inviscid growth rate as $\sigma_{nv} = \zeta\varepsilon$. The coefficients ν_{m_1} and ν_{m_2} are viscous damping terms of order $\frac{1}{\varepsilon Re}$. In order to keep these terms in (3.3), it is implicitly assumed that $Re = O(\frac{1}{\varepsilon})$. As demonstrated by Eloy & Le Dizès [25], it is important to consider viscous effects on the perturbation to understand the mode selection in more realistic configurations. Viscous damping will always tend to stabilize resonant configurations of large wavenumber. It also favors the unstable modes with the smallest wavenumbers which is in agreement with all the experimental observations of the elliptic instability.

On figure 3.1 are displayed the normal mode frequencies ω versus k for two azimuthal wavenumbers $m = 1$ and $m = -1$ and for a fixed axial parameter $W_0 = 0.3$. Each branch crossing, except those involving the Kelvin-Helmholtz branch indicated by thin lines, corresponds to a resonant configuration. Yet, these unstable configurations do not exhibit the same growth rate. As demonstrated by Eloy & Le Dizès [25] for the Rankine vortex without axial flow, resonant configurations associated with the crossing of two branches of same label, possess a growth rate much larger than the others. This feature is also observed in presence of axial flow. As in Eloy & Le Dizès [25], these resonant configurations will be called "principal modes". The first three principal modes for the azimuthal wavenumbers $m = 1$ and $m = -1$, noted $(-1, 1, i)$ $i = 1, 2, 3$, are indicated by small circles in figure 3.1. In the following section, the condition of resonance (3.2) is analyzed for various couples of azimuthal wavenumbers (m_1, m_2) as a function of W_0 . The characteristics of the first principal modes and the coefficients ζ , ν_{m_1} and ν_{m_2} in their growth rate expression (3.3) are computed.

3.3 Results

In figures 3.2(a,b) are plotted as a function of W_0 the characteristics of the first three resonant modes for $(m_1, m_2) = (-1, 1)$. The coupling coefficient ζ is shown in figure 3.2(c). It measures the non-viscous growth rate normalized by the strain rate. The dotted line in figure 3.2(c) is the local estimate $\zeta = 9/16$ obtained by Waleffe [122] by considering the vortex core only. As shown by Eloy & Le Dizès [25] for a Rankine vortex without axial flow, this estimate is also obtained for the growth rate of principal modes if their frequency is close to $\frac{m_1 + m_2}{2}$. Similar results are observed in the presence of axial flow. The local estimate of Waleffe [122] is not modified by axial flow. However, one can easily show that the principal mode frequency must satisfy

$$\omega = \frac{m_1 + m_2}{2} + kW_0 \quad (3.4)$$

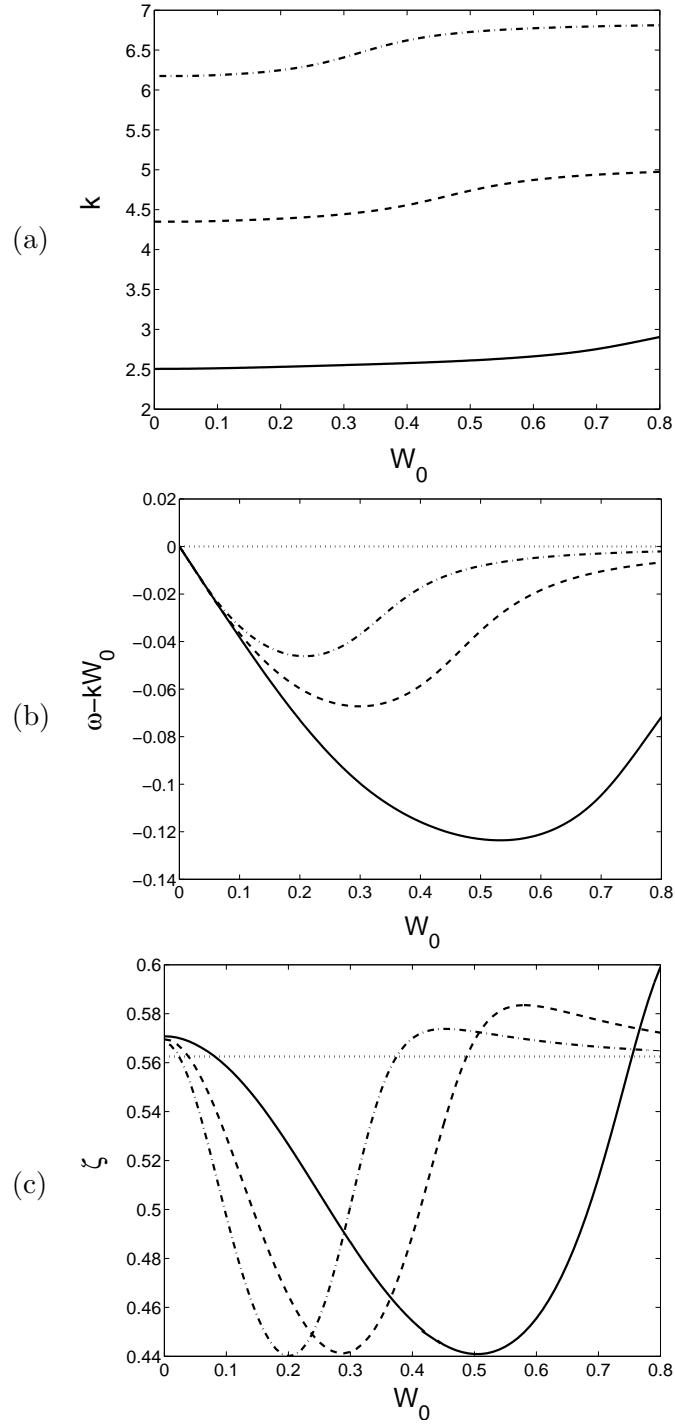


Figure 3.2: Characteristics of the first three principal modes for $(m_1, m_2) = (-1, 1)$. Solid, dashed and dash-dot lines are respectively the first, second and third principal modes. (a) : Axial wavenumber k . (b) : Convective frequency $\omega - kW_0$. (c) Coupling coefficient ζ (also equal to the non-viscous growth rate normalized by the strain rate).

in addition to (3.2), to reach the local estimate. In the sequel, we shall denote this condition as the condition of "ideal resonance". The condition of "ideal resonance" is shown by a dotted line in figure 3.2(b). Upon comparing the plots in figure 3.2(b) and 3.2(c), one can see that there is a good correlation between the growth rate curve and the gap between mode frequency and ideal frequency. When the gap is the largest, the growth rate is the smallest. This correlation becomes even better as k increases for a fixed W_0 . These features were also observed in the Rankine vortex without axial flow [25]. Note however that without axial flow, the principal modes $(-1, 1)$ were all "ideally" resonant because of the symmetry of the dispersion relation $\omega(-m) = -\omega(m)$. When an axial flow is present, as this symmetry is broken, no principal mode is *a priori* ideally resonant. It is only for particular values of W_0 that the frequency of a given principal mode can satisfy (3.4). Such values of W_0 are given in table 3.1 for a few principal modes of negative azimuthal wavenumbers. For positive azimuthal wavenumbers, one has to change W_0 into $-W_0$.

modes	(m_1, m_2)	$(-4, -2)$			$(-3, -1)$		
	i	1	2	3	1	2	3
W_0		0.1309	0.0527	0.0268	0.1698	0.0529	0.0240
$\omega - kW_0$		-3.0023	-3.0025	-3.0013	-2.0091	-2.0031	-2.0014
k		3.0521	5.0044	6.8832	2.3259	4.2191	6.0734
ζ		0.5850	0.5707	0.5679	0.5876	0.5710	0.5683

modes	(m_1, m_2)	$(-2, 0)$			$(-1, 1)$		
	i	1	2	3	1	2	3
W_0		0.2563	0.0456	0.0176	0	0	0
$\omega - kW_0$		-1.0329	-1.0035	-1.0015	0	0	0
k		1.5505	3.3842	5.2321	2.505	4.349	6.174
ζ		0.5901	0.5710	0.5686	0.5708	0.5695	0.5681

Table 3.1: Characteristics of the principal modes close to "ideal resonance"

In this table are also given the frequency, the wavenumber and the coupling coefficient ζ of the principal modes. Again, one can check that ζ is very close to $\frac{9}{16} \sim 0.5625$ for all these modes and the closest for the largest k .

As seen on the growth rate formula (3.3), viscosity is always stabilizing. Moreover, viscous damping increases as k increases : the most unstable principal modes are therefore expected to have a small axial wavenumber.

The marginal curves for a few couples of azimuthal wavenumbers (m_1, m_2) are plotted in figure 3.3. The principal mode $(0, 2, 1)$ is seen to be always the first mode to be destabilized for $W_0 > 0$. Surprisingly, this occurs for a value of εRe which is almost independent of W_0 (for $0 < W_0 < 0.8$) and close to 10.

Note that the classical principal mode $(-1, 1, 1)$ is destabilized for much larger values of εRe . Note also that as εRe increases, more and more prin-

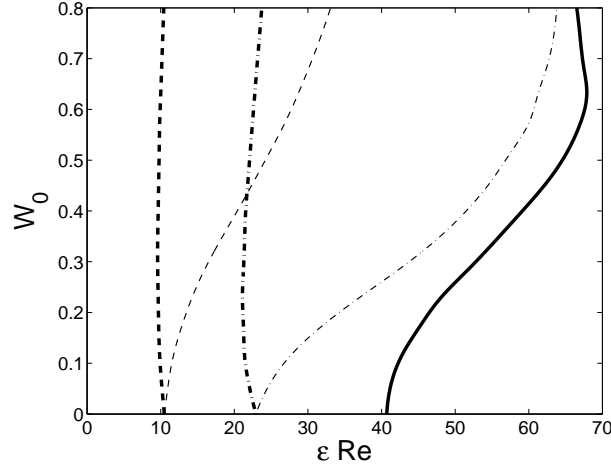


Figure 3.3: Marginal stability curve for the resonant modes of azimuthal wavenumbers m_1 and m_2 . Solid line : $(m_1, m_2) = (-1, 1)$, bold dashed line : $(m_1, m_2) = (0, 2)$, thin dashed line : $(m_1, m_2) = (0, -2)$, bold dash-dot line : $(m_1, m_2) = (1, 3)$, thin dash-dot line : $(m_1, m_2) = (-1, -3)$.

cial modes are destabilized. But the first mode to be destabilized does not always remain the most unstable mode.

In figure 3.4, the normalized viscous growth rate σ/ε is plotted for the most unstable modes when $\varepsilon Re = 950$. In this figure, one can see that four different principal modes become the most unstable as W_0 varies. The bold line represents the maximum growth rate versus W_0 for $\varepsilon Re = 950$. It is worth noticing that for this value of εRe there exist a most dangerous axial parameter $W_{0c} \approx 0.25$ for which the maximum growth rate is the largest.

The variations of W_{0c} and of the corresponding growth rate versus εRe are shown in figure 3.5. The distribution of the most unstable modes in the parameter plane $(\varepsilon Re, W_0)$ is given in figure 10.4. One can notice that the larger εRe , the more important is the number of most unstable modes. This results from the weakening of the selective character of viscosity. The mode selection for large εRe is indeed associated with variation of the coupling coefficient ζ . In particular, one expects the "ideally" resonant modes whose characteristics are given in table 3.1 and which exhibit the largest non-viscous growth rate to appear for sufficiently large εRe . This is visible on the right side of figure 10.4.

3.4 Conclusion

In this paper, we have analyzed the stability of a strained Rankine vortex with axial flow with respect to the elliptic instability for small strain field, following the analysis of Tsai & Widnall [120]. The marginal stability curve and the complete diagram of instability providing the most unstable mode have been obtained as functions of viscosity and axial flow.

The effect of axial flow has been shown to be important. By breaking the symmetry of the dispersion relation, it fundamentally modifies the nature

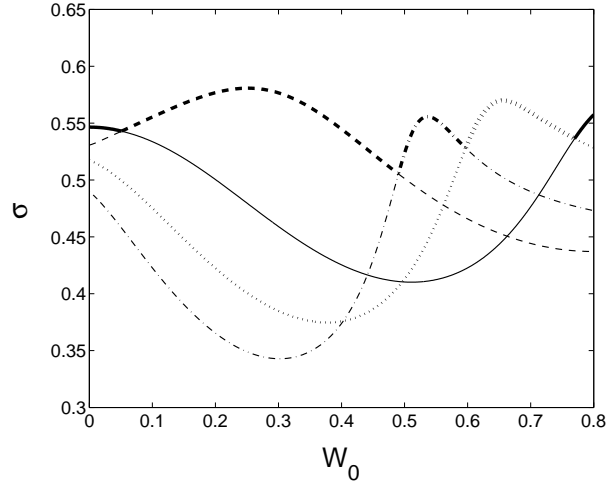


Figure 3.4: Viscous growth rate of four more unstable modes as W_0 varies for $\varepsilon Re = 950$. Solid line : $(-1, 1, 1)$, dashed line : $(-2, 0, 1)$, dash-dot line : $(1, 3, 2)$, dotted line : $(0, 2, 2)$.

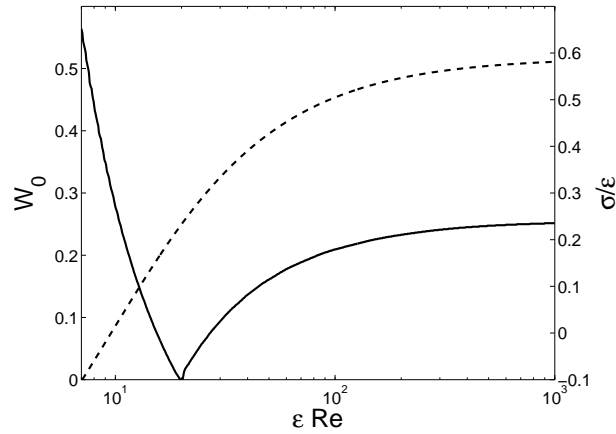


Figure 3.5: Most dangerous axial flow parameter W_{0c} (solid line) and corresponding maximum growth rate (dashed line) as a function of εRe .

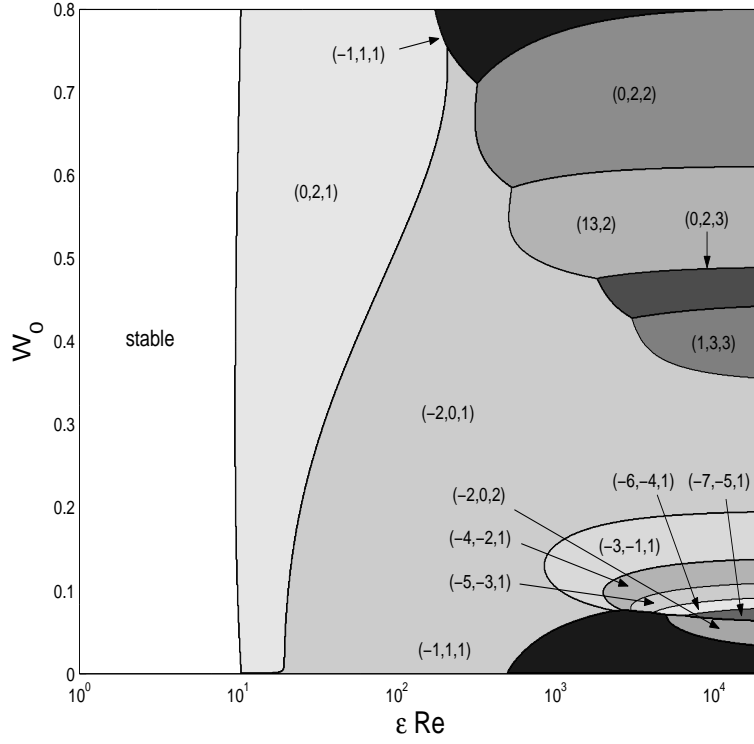


Figure 3.6: Most unstable mode in the (W_0, Re) plane.

of the resonant modes. Contrarily to the case without axial flow, the most unstable modes for large εRe , are not always principal modes with azimuthal wavenumbers $m = -1$ and $m = 1$. Instead, various unstable modes with higher azimuthal wavenumbers have been shown to exist depending on the value of W_0 . However, all these modes exhibit a same property. Their frequency satisfies the condition (3.4) of “ideal resonance” which is deduced from a maximization of the local instability.

m	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
W_{0_s}	0.48	0.55	0.64	0.76	0.96	1.32	2.17
k_s	0.92	0.80	0.69	0.58	0.47	0.34	0.22
m	1	2	3	4	5	6	7
W_{0_s}	2.08	1.41	1.11	0.94	0.81	0.73	0.65
k_s	0.29	0.51	0.69	0.85	0.99	1.12	1.24

Table 3.2: Critical axial flow parameter W_{0_s} and critical axial wavenumber k_s for various m associated with the Kelvin-Helmholtz instability. The Kelvin-Helmholtz mode is unstable for $W_0 < W_{0_s}$ or $k > k_s$ but it can be neutral if none of these conditions is satisfied.

4. TOURBILLON DE BATCHELOR

Dans la section précédente, la stabilité du tourbillon de Rankine possédant en son cœur un jet axial uniforme et soumis à un champ d'étirement bidimensionnel et stationnaire a été étudiée. Nous allons maintenant nous intéresser au cas plus "réaliste" de profils de vorticité et de jet continus. Pour cela, des tourbillons axisymétriques de profils Gaussiens vont être considérés. La stabilité de tels profils va être discutée ainsi que les caractéristiques de l'instabilité due à une déformation elliptique. Nous montrerons également que l'étude préliminaire du tourbillon de Rankine était indispensable pour une meilleure compréhension du phénomène physique mais surtout pour l'étude paramétrique à envisager pour un tel problème.

4.1 Cadre de l'étude.

Le tourbillon de Batchelor qui a des profils de vorticité ω_0 et de vitesse axiale W adimensionnés peuvent s'écrire en coordonnées cylindriques (r, θ, z) ,

$$\begin{aligned}\omega_0(r) &= 2e^{-r^2}, \\ W(r) &= W_0 e^{-r^2}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Les grandeurs caractéristiques du problème, à l'origine des formes adimensionnelles de l'équation (4.1), sont le temps inertiel Ω_0^{-1} (où Ω_0 est la vitesse angulaire au centre du tourbillon) et le rayon $a_0 = a(t=0)$ du vortex à l'instant initial. W_0 représente ainsi le rapport entre l'amplitude du jet au centre et la vitesse angulaire au centre multipliée par le rayon du tourbillon. Le tourbillon de Batchelor (4.1) qui est solution stationnaire des équations d'Euler varie au cours du temps sur une échelle de temps visqueuse : un terme non stationnaire compense le terme de diffusion. La vorticité vérifie alors l'équation de diffusion

$$\frac{\partial \omega_{0i}}{\partial t} = \frac{1}{Re} \Delta \omega_{0i},\tag{4.2}$$

où $Re = \Omega_0 a_0 / \nu$ (ν est la viscosité dynamique) est le nombre de Reynolds associé à la rotation du fluide et $\omega_{0i} = \frac{1}{a^{*2}} e^{-r^2/a^{*2}}$. a^* représente la variation temporelle du rayon du cœur du tourbillon adimensionné par sa valeur à l'instant initial. Une équation de diffusion équivalente peut être écrite pour le terme de jet axial W . La solution de l'équation (4.2) permet de décrire la variation temporelle du rayon du cœur du tourbillon :

$$a^* = \sqrt{\frac{4t}{Re}} + 1.\tag{4.3}$$

La croissance temporelle de la taille du cœur du tourbillon et la diminution de l'amplitude du profil de vorticité sont représentés sur la figure 4.1. La variation du profil de jet axial possède une tendance équivalente à celle du profil de vorticité.

En fait, pour $t \ll Re$, le terme de l'équation (4.3) correspondant à la crois-

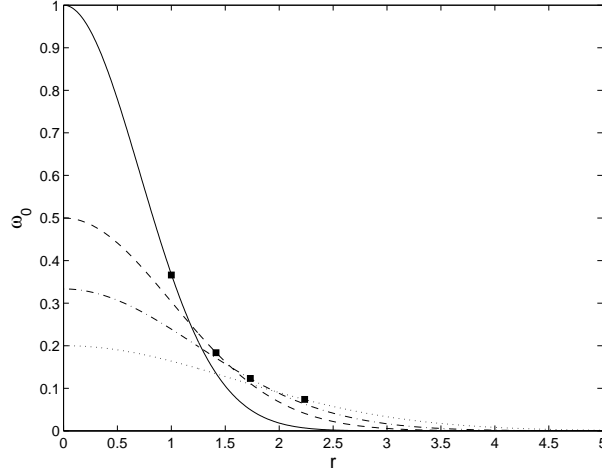


Figure 4.1: Variation temporelle du profil de vorticité du tourbillon de Batchelor soumis à la viscosité. 'trait plein' : $t = 0$, 'trait discontinu' : $t = Re/4$, 'trait mixte' : $t = Re/2$, 'pointillé' : $t = Re$. Les carrés noirs représentent la position du rayon du tourbillon : a^* .

sance temporelle est négligeable. Ainsi, pour toute étude du tourbillon de Batchelor sur des temps caractéristique tels que $t \ll Re$, le tourbillon est "figé" et l'écoulement de base stationnaire (4.1) peut être justifié. Cette hypothèse de grand Reynolds est en accord avec les nombres de Reynolds caractéristiques d'un sillage d'avion qui vérifient $Re \sim 10^7 - 10^8$. Nous nous placerons dans cette étude dans le cadre d'écoulement de base non visqueux (4.1), *i.e.* dont le temps de diffusion est très grand devant le temps caractéristique du développement de l'instabilité non visqueuse que nous nous proposons d'étudier. Comme nous l'avons déjà mentionné dans le chapitre précédent et comme nous le reverrons par la suite, le temps caractéristique pour le développement de l'instabilité elliptique sur un écoulement en rotation est d'ordre $1/\varepsilon$ où ε représente l'ellipticité de l'écoulement (\sim excentricité des lignes de courants). Ainsi, si $\varepsilon \gg 1/Re$, l'hypothèse de cette étude est valide.

L'étude de stabilité du tourbillon de Batchelor (4.1) a déjà été envisagée dans de nombreux travaux [76, 74, 73, 84]. Il a notamment été montré que ce tourbillon est instable d'un point de vue non visqueux pour des composantes de jet plus grandes qu'une valeur critique $W_{0c} \sim 0.6$. Cette instabilité est induite par le cisaillement du jet proche du rayon du tourbillon (instabilité de Kelvin-Helmholtz et instabilité centrifuge généralisée). L'effet de la viscosité sur cette instabilité est d'atténuer son taux de croissance. Dans la suite, nous ne détaillerons pas cette instabilité. Le taux de croissance d'énergie lié à cette instabilité est d'ordre 1 donc supérieur à l'instabilité elliptique. Nous

nous intéresserons donc uniquement à une gamme de paramètre stable vis-à-vis de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Khorrami [54] et Duck & Khorrami [22] ont mis en évidence l'existence d'une instabilité purement visqueuse du tourbillon de Batchelor pour des nombres d'ondes azimutaux $m = 0$ et $m = 1$ lorsque $W_0 > 1$. Fabre [28] a obtenu d'autres modes visqueux pour des valeurs de jet axial $W_0 < 1$. En revanche, le taux de croissance de ces modes est dépendant du nombre de Reynolds : $\sigma \sim Re^{-1/3}$ [30, 68] et est donc très faible pour les grands nombres de Reynolds représentatifs d'un sillage d'avion. Nous allons nous intéresser dans le cadre de cette étude au tourbillon de Batchelor stable vis-à-vis des instabilités que nous venons de mentionner. Pour cela nous allons restreindre notre étude à une gamme des paramètres bien définis.

Nous allons donc étudier la stabilité du tourbillon de Batchelor d'un fluide non visqueux¹ pour $W_0 < W_{0c}$ (stable vis-à-vis du cisaillement) lorsque il est contraint par un champ d'étirement bidimensionnel. Pour cela, nous nous proposons dans un premier temps de définir les modes non visqueux de perturbation d'un tourbillon de Batchelor isolé stable. Les modes non visqueux sont, en effet, les modes susceptibles d'induire une instabilité elliptique du tourbillon [24, 57].

4.2 Analyse linéaire et non visqueuse du tourbillon de Batchelor.

Une partie des résultats présentés dans cette section est décrite en détail dans un article soumis au *Journal of Fluid Mechanics* (Cf. Annexe).

Nous nous proposons tout d'abord de déterminer et décrire la famille des modes de Kelvin du tourbillon de Batchelor. Il est maintenant admis que dans le cas du tourbillon de Rankine (et de l'écoulement généré par un cylindre en rotation), ces modes oscillants au centre semblent être une base complète définissant toutes perturbations localisées dans le cœur [4]. Ceci n'est plus vrai pour un tourbillon défini par un profil de vorticité continu. En revanche, comme dans le cas du tourbillon de Rankine, les modes de Kelvin si ils existent et si ils sont neutres semblent être les modes susceptibles de pouvoir résonner avec le forçage paramétrique défini par une déformation elliptique du tourbillon.

4.2.1 Description des modes de Kelvin.

Considérons une perturbation infinitésimale de vitesse \mathbf{u}' et pression p' superposée à l'écoulement de base (4.1). La forme des équations d'Euler linéarisées autour de cet état de base et la forme de l'écoulement de base permettent de décomposer \mathbf{u}' et p' sous la forme d'onde :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}' &\sim \mathbf{u}(r)e^{i(m\theta + kz - \omega t)}, \\ p' &\sim p(r)e^{i(m\theta + kz - \omega t)}.\end{aligned}$$

Ainsi, les équations d'Euler linéarisées autour de l'état de base (4.1) s'écrivent pour le champ de vitesse dans la base cylindrique (u, v, w) et le champ de

¹ les effets visqueux ne seront considérés que pour $Re \gg 1$

pression p

$$\begin{aligned}
i\gamma u + 2\Omega v &= \frac{dp}{dr}, \\
i\gamma v - \omega_0 u &= \frac{im}{r} p, \\
i\gamma w - W'u &= ikp, \\
\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) + \frac{im}{r} v + ikw &= 0,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

où le prime représente la dérivée par rapport à r et $\gamma = \omega - m\Omega - kW$. Le système (4.4) peut se réduire à une équation différentielle du second ordre de la variable r pour la pression $p(r)$. Après simplification, cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + A(r) \frac{\partial p}{\partial r} + B(r)p = 0, \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
A(r) &= \frac{1}{r} - \frac{\Delta'}{\Delta}, \\
B(r) &= \frac{2m}{\gamma r} \left(\frac{\Delta'\Omega}{\Delta} - \Omega' \right) - \frac{m^2}{r^2} - \frac{k^2 \Delta}{\gamma^2} - \frac{2km\Omega W'}{\gamma^2 r^2},
\end{aligned}$$

avec $\Delta = \gamma^2 - 2\Omega\omega_0$. L'équation pour la pression (4.5) que nous avons dérivée est très peu utilisée dans la littérature. Plus souvent, une équation pour la vitesse radiale, obtenue pour la première fois par Howard & Gupta [42], est utilisée.

Ainsi, déterminer les modes non visqueux du tourbillon de Batchelor se ramène à la résolution de l'équation différentielle (4.5). Il n'existe pas, *a priori*, pour des profils de vorticité et de jet quelconques, de solutions explicites de l'équation (4.5). En revanche, on peut se ramener, dans le cas particulier du tourbillon de Rankine, à l'équation des fonctions de Bessel et retrouver les résultats déjà connus de solutions à structure radiale oscillante dans le cœur et à décroissante à l'extérieur [25, 119, 34, 57].

Pour un profil continu, la résolution de l'équation (4.5) passe par une méthode classique de "shooting". Une solution proche du cœur ($p_{int}(r)$) et une solution à l'extérieur du tourbillon ($p_{ext}(r)$) sont déterminées par intégration de l'équation 4.5. Les conditions initiales pour cette intégration sont les conditions limites associées à un mode non visqueux en $r = 0$ et $r \rightarrow \infty$. Une simple analyse asymptotique montre que proche de $r = 0$ $p_{int}(r) \stackrel{r=0}{\sim} r^{|m|}$ et que la condition de décroissance du mode lorsque $r \rightarrow \infty$ s'écrit $p_{ext}(r) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{-kr}$. Pour m et k donnés, une fréquence ω est alors solution de l'équation (4.5) si le Wronskien en un point de raccord r_r formé de la solution au cœur $p_{int}(r)$ et de la solution à l'extérieur $p_{ext}(r)$ s'annule (les solutions intérieures et extérieures sont alors linéairement dépendantes : ces deux solutions définissent donc une solution unique sur tout l'espace r).

Les résultats obtenus par Sipp [110] pour $m = 1$ dans le cas d'un tour-

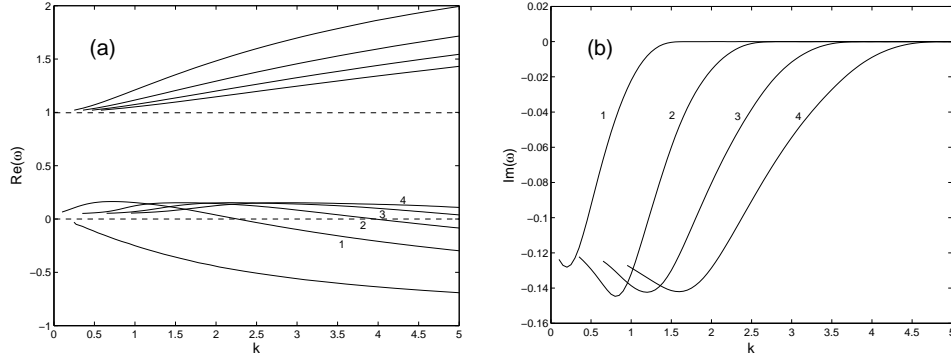


Figure 4.2: Solutions de l'équation (4.5) pour le tourbillon de Lamb-Oseen ($W_0 = 0$). (a) : fréquences en fonction du nombre d'onde axial. Les traits discontinus délimitent la zone où l'équation (4.5) est singulière en un point r de l'espace. (b) : atténuation non visqueuse des modes singuliers (Cf. section suivante). Les numéros sur les figures (a) et (b) représentent la même solution.

billon sans jet axial de type Lamb-Oseen sont présentés figure 4.2. Chaque branche ² correspond à une structure radiale donnée qui est caractérisée par le nombre d'oscillation de la fonction représentant le mode (voir ci-dessous). Cette figure met en évidence un intervalle de fréquences où les modes ne sont pas neutres (figure 4.2.(b)). Dans cet intervalle, les modes sont atténués par la présence d'une singularité $\gamma(r_c) = 0$ qui doit être évité dans le plan complexe associé à la coordonnée radial [79], comme nous l'expliquerons plus en détail dans la section suivante. A l'extérieur de cet intervalle, les modes sont neutres et sont de structures similaires à ceux obtenus dans le cas du tourbillon de Rankine.

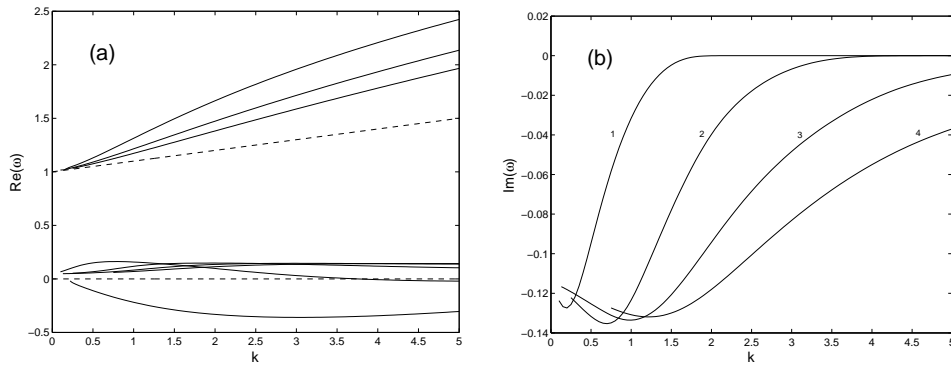


Figure 4.3: Identique à la figure 4.2 pour $W_0 = 0.1$.

L'effet d'un faible jet axial ($W_0 = 0.1$) pour la même valeur de m est de légèrement modifier la forme des branches solutions (figure 4.3). Dans le référentiel advecté par le jet au centre du tourbillon, les fréquences solutions

² Dans la suite nous pourrions différencier ces branches en leur attribuant un nombre (ou label) i

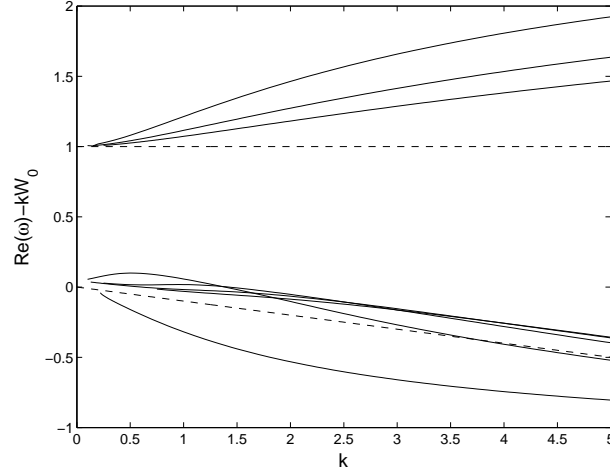


Figure 4.4: Fréquences dans le repère se déplaçant avec le jet au centre pour les mêmes conditions que la figure 4.3.

$(\omega - kW_0)$ pour les modes non atténués sont qualitativement identiques aux solutions sans jet dans le référentiel fixe (figure 4.4). On peut en revanche constater que l'intervalle de fréquences des modes atténués varient par la présence d'un jet. Cet intervalle sera quantitativement définie en fonction du paramètre de jet dans la section suivante.

La structure radiale de modes stationnaires de Kelvin neutres pour $m = 1$ est présentée sur la figure 4.5 pour le tourbillon de Lamb-Oseen et sur la figure 4.6 pour le tourbillon de Batchelor avec un faible jet axial ($W_0 = 0.1$). Dans le cas du tourbillon de Lamb-Oseen sont tracées la pression et les composantes de la vitesse pour les branches numérotés 1 et 3 (Cf. figure 4.2). On constate comme nous l'avions mentionné précédemment que la structure du mode et donc le nombre d'oscillations dans la direction radial dépend de la branche considérée. De plus, la structure de mode appartenant à une branche de même label i (*i.e.* correspondant au même nombre d'oscillations) pour les tourbillon de Lamb-Oseen (figure 4.5 (a) et (b)) et de Batchelor (figure 4.6 (a) et (b)) est comparable.

Une étude paramétrique plus approfondie des modes nous montrent que plusieurs catégories peuvent être à différencier. Nous allons dans les prochaines sections distinguer les modes réguliers (neutres : modes de Kelvin) des modes singuliers (atténués) ainsi que les modes de cœur (oscillant au centre) des modes couronnes (oscillant dans une couronne proche du centre). Nous pouvons noter que dans le cas du tourbillon de Rankine, les solutions de l'équation pour la pression (4.5) sont uniquement des modes de cœur neutres. Nous privilégierons ces modes dans la suite. Ils sont, a priori, les plus susceptibles de résonner avec un champ de cisaillement pour déstabiliser le tourbillon.

Nous allons dans le prochain paragraphe brièvement expliquer comment les solutions atténuées non visqueuses induites par des singularités de l'équation (4.5) peuvent être déterminées (pour plus de détails sur cette partie, nous renvoyons le lecteur à l'article de Le Dizès [66]). Ensuite, une approximation

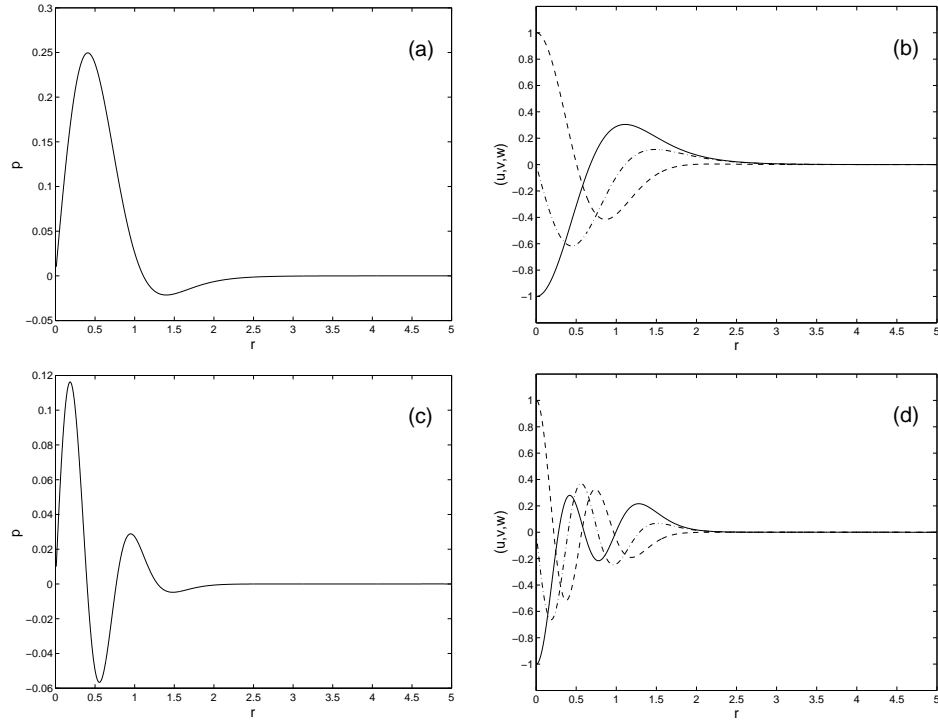


Figure 4.5: Structures radiales de modes neutres stationnaires du tourbillon de Lamb-Oseen. (a) & (b) : $k = 2.26$ et (c) & (d) : $k = 5.61$, correspondent respectivement à la branche 1 et 3 figure 4.2. Les figures (a) et (c) représentent la pression et les figures (b) et (d) le champ de vitesse ('trait plein' : $\text{Im}(u)$, 'trait discontinu' : $\text{Re}(v)$, 'trait mixte' : $\text{Re}(w)$)

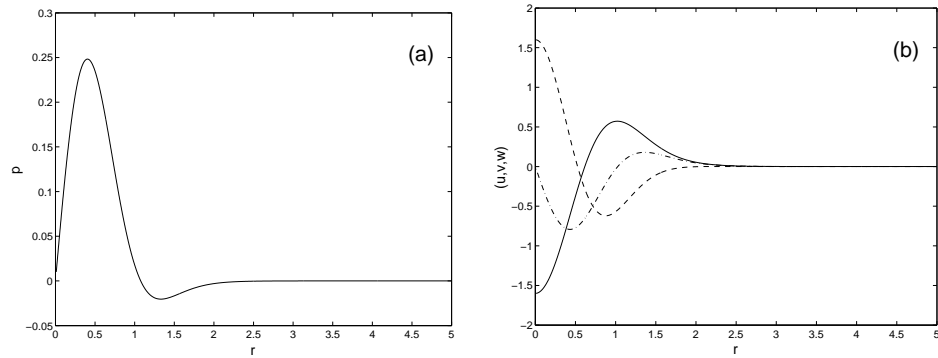


Figure 4.6: Structures radiales d'un mode neutre stationnaire du tourbillon de Batchelor ($W_0 = 0.1$, $k = 3.7$). Même légende que la figure 4.5.

des solutions pour des nombres d'ondes tels que $k \gg 1$ va être décrite et utilisée pour caractériser les différents modes.

4.2.2 Atténuation non visqueuse : couche critique.

Comme nous l'avons souligné dans la section précédente, l'équation (4.5) est singulière lorsque le terme $\gamma = \omega - m\Omega - kW$ s'annule en un point $r = r_c$. Cette singularité peut être régularisée en tenant compte des effets visqueux [66] lorsque $Re \rightarrow \infty$. Dans ce cas, dans un voisinage d'ordre $\mathcal{O}(Re^{-1/3})$ autour de r_c , le mode varie sur une échelle de longueur visqueuse. Comme l'a montré Le Dizès [66], l'analyse des solutions dans ce voisinage permet de montrer que la solution non visqueuse reste asymptotiquement valide si on évite r_c dans le plan complexe selon un contour judicieusement choisi (figure 4.7). Cette analyse montre également que dans un secteur du plan complexe (zone grise de la figure 4.7) issu de ce point la solution est toujours dominée par des effets visqueux.

Il est à noter que le contour d'intégration va dépendre du signe de m . En

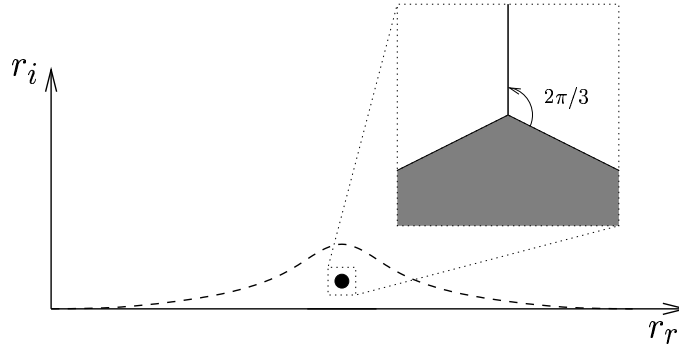


Figure 4.7: Contour d'intégration pour déterminer l'approximation non visqueuse d'un mode singulier. Le cadre est un "zoom" autour de la singularité ($r = r_c$). Dans ce cadre, les trois lignes de Stokes de l'approximation WKB $Re \gg 1$ sont tracés. La zone grisée est la zone à dominante visqueuse.

effet, pour $m > 0$, le point critique est au dessus de l'axe réel alors que pour $m < 0$ il est en dessous. Dans les deux cas la zone à dominante visqueuse traverse l'axe réel.

Cette singularité explique l'atténuation des modes sur les figures 4.2 et 4.4. On peut facilement déterminer l'intervalle de fréquences (dans un plan (ω, k)) pour lequel les modes peuvent être atténués dus à la présence de cette singularité. Ces intervalles sont représentés pour différents m sur la figure 4.8. Il est mis en évidence l'effet d'un jet axial sur la présence de couche critique. Pour $m = 0$ et $m = 1$, un jet semble "propice" aux modes singuliers. En revanche, pour $m < 0$, la zone de couches critiques diminue pour W_0 croissant pour atteindre une épaisseur minimum puis augmente pour des valeurs de W_0 plus grandes. Les traits discontinus délimitent la zone dans laquelle on s'attend à trouver les modes de cœurs. L'analyse très simple qui

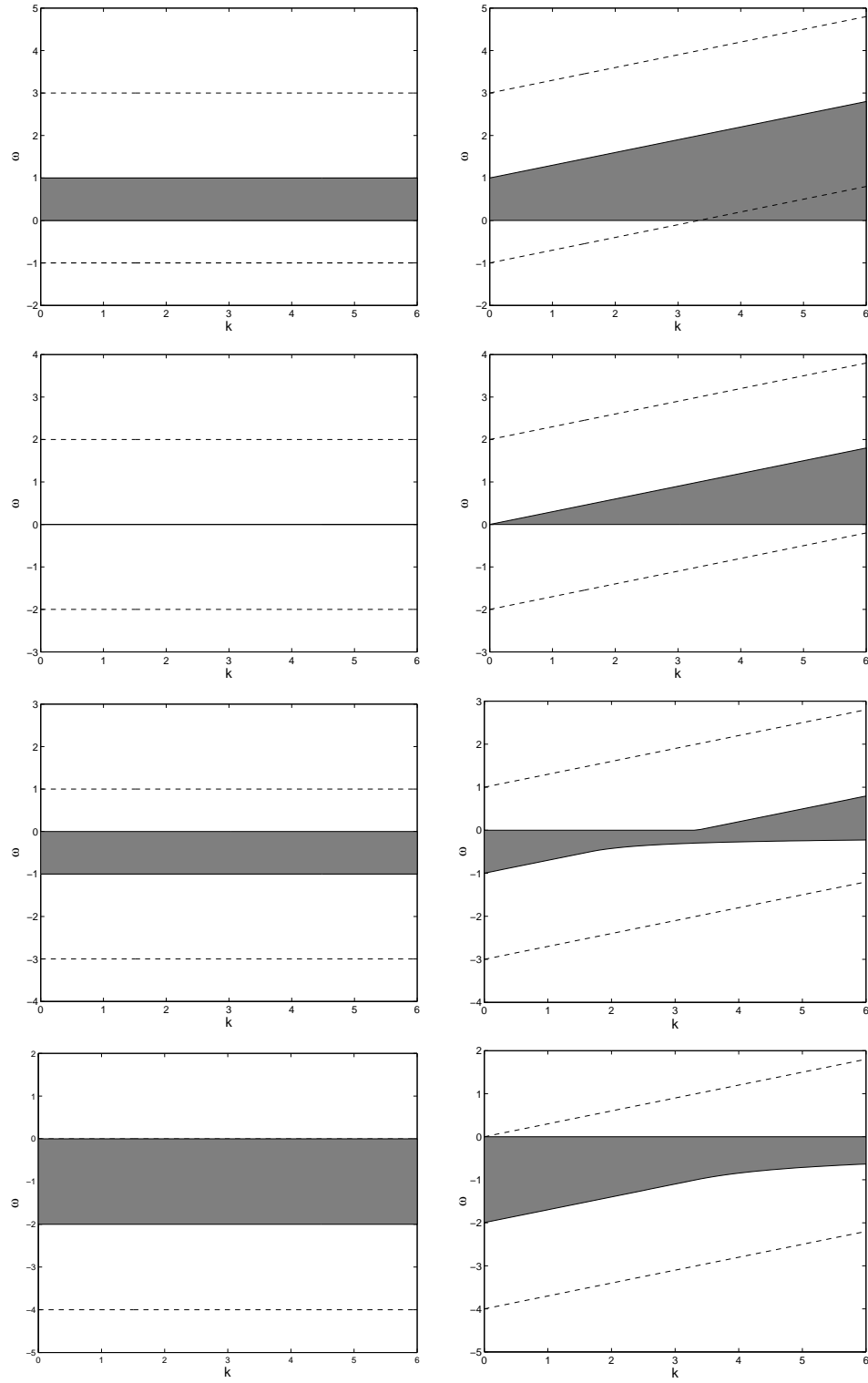


Figure 4.8: Illustration des zones de couches critiques dans un plan (ω, k) pour différents m et W_0 . Une solution (ω, k) dans la zone grise est singulière en un point r_c . ω est alors complexe. La colonne de gauche correspond à $W_0 = 0$ et la colonne de droite à $W_0 = 0.3$. Les figures sur chaque ligne horizontale du haut vers le bas correspondent respectivement à $m = 1$, $m = 0$, $m = -1$ et $m = -2$.

amène à considérer cette zone découle de l'étude du tourbillon de Rankine. Dans ce cas, il a été montré que les fréquences de modes de cœur sont contenus dans un intervalle délimité par les conditions $m - 2 \leq \omega \leq m + 2$. Si l'on considère que l'effet de jet sera au premier ordre un effet Doppler³ sur les fréquences, alors les intervalles solutions peuvent être délimités comme indiqué sur la figure 4.8. Une étude paramétrique nous a montré que ce résultat semble valable pour les modes de cœur mais n'est plus vrai pour les modes couronnes. Ainsi, en suivant par exemple la branche 1 (voir

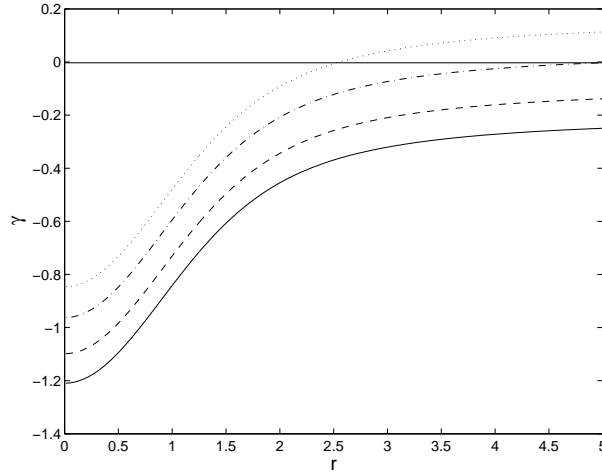


Figure 4.9: Structure radiale de la fonction γ pour des modes le long de la branche 1 figure 4.2. 'trait plein' : $k = 4$, 'trait discontinu' : $k = 3$, 'trait mixte' : $k = 2$, 'pointillé' : $k = 1$.

figure 4.2) pour k de plus en plus petit, on constate que le mode considéré “entre” dans la zone de couche critique (ce mode définit le second mode contra-rotatif (figure 4.5 (a) et (b))). La fonction γ associée à ce mode est représentée sur la figure 4.9 pour $k = 4$, $k = 3$, $k = 2$ et $k = 1$. La couche critique telle que $\gamma(r_c) = 0$ se rapproche du cœur du tourbillon lorsque k diminue. Cette tendance se traduit par une augmentation du taux de dissipation $\mathcal{I}m(\omega)$ (figure 4.2). Ainsi, les modes contra-rotatifs subissent de fortes modifications lorsque la longueur d'onde associée à chacun d'eux varie.

On se propose maintenant de caractériser la modification de certains modes lorsque la composante de jet est progressivement augmentée. Pour cela, les nombres d'ondes axiaux sont fixés. Les trois premiers modes contra-rotatifs stationnaires du cas sans jet ($k = 2.26$, $k = 3.96$ et $k = 5.61$) sont considérés. Les solutions sont présentées sur la figure 4.10 pour un paramètre de jet variant de $W_0 = 0$ à $W_0 = 0.4$. La fonction γ associée à la première branche ($k = 2.26$) est représentée sur la figure 4.11 pour quatre valeurs de W_0 . Là encore, une couche critique qui se rapproche du cœur est mise en évidence. La position de la singularité r_c associée aux modes présentés

³ Ce qui est le cas pour les grands nombres d'ondes axiaux pour les modes du tourbillon de Rankine ; Cf. chapitre 3

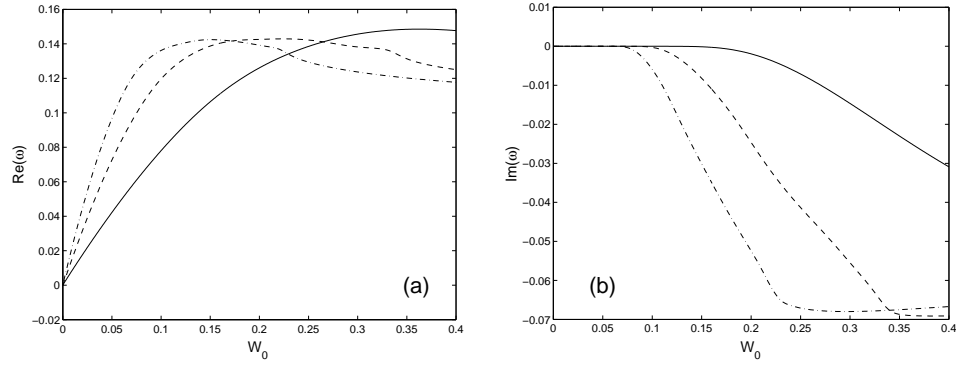


Figure 4.10: Solutions de l'équation (4.5) en fonction de W_0 pour $k = 2.26$ ('trait plein'), $k = 3.96$ ('trait discontinu') et $k = 5.61$ ('trait mixte'). Pour $W_0 = 0$ ces modes correspondent aux modes stationnaires des branches 1, 2 et 3 de la figure 4.2. (a) : fréquence associé à la solution ($\text{Re}(\omega)$); (b) : atténuation non visqueuse ($\text{Im}(\omega)$).

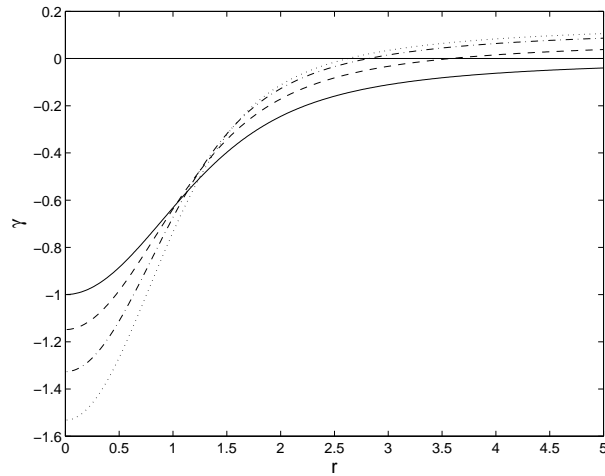


Figure 4.11: Structure radiale de la fonction γ associée aux résultats de la figure 4.10 pour $k = 2.26$ et $W_0 = 0$ ('trait plein'), $W_0 = 0.1$ ('trait discontinu'), $W_0 = 0.2$ ('trait mixte'), $W_0 = 0.3$ ('pointillé').

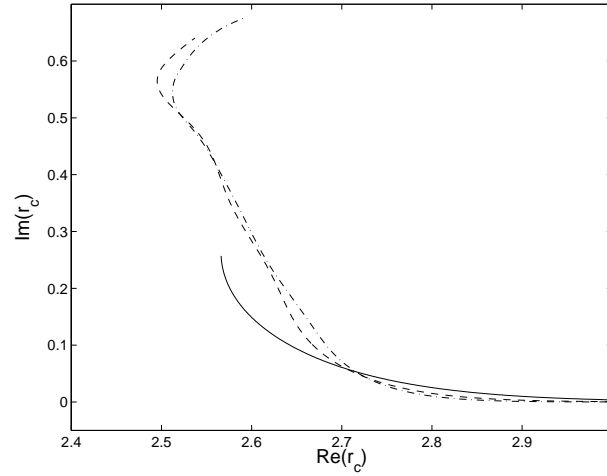


Figure 4.12: Position dans le plan complexe de la singularité r_c telle que $\gamma(r_c) = 0$ pour les courbes de la figure 4.10 (même légende).

sur la figure 4.10 est tracé dans l'espace complexe sur la figure 4.12. Plus la couche critique se rapproche du cœur, plus elle s'écarte de l'axe réel. Cela se traduit également par une atténuation de plus en plus grande du mode. Nous pouvons également noter que les courbes de fréquence dans le référentiel

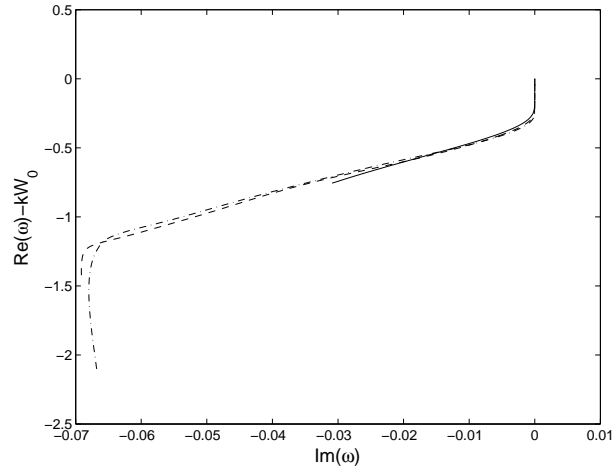


Figure 4.13: Atténuation en fonction de la fréquence dans le repère se déplaçant avec le jet au centre (résultats de la figure 4.10 avec la même légende).

lié à la valeur maximale du jet W_0 en fonction de l'atténuation se superposent (figure 4.13). Il semblerait que l'atténuation soit donc fonction de cette fréquence et peu dépendante de la structure radiale.

Dans cette partie, nous avons caractérisé l'influence d'un jet axial sur les modes singuliers d'un tourbillon Gaussien. Nous pouvons finalement noter que le jet semble, pour certaines valeurs de m , être propice à la présence de

modes de cœurs neutres. Pour $m \leq -2$, des modes co-rotatifs neutres qui n'existent pas dans le cas du tourbillon de Lamb-Oseen semblent être possibles par ajout de jet. En revanche, pour $m \geq 0$, l'intervalle de fréquence caractérisé par des modes singuliers s'élargit. Les modes neutres disparaissent alors au profit de modes atténués singuliers.

De plus, nous avons vu lors de l'étude de l'instabilité elliptique du tourbillon de Rankine qu'il existe des valeurs de jet pour lesquelles des couplages d'ondes azimutales différentes de $(-1, 1)$ peuvent être les plus instables. On peut donc envisager que ces couplages soient également possibles pour d'autres profils si les modes sont neutres proche de la valeur optimale de jet. La caractérisation des modes neutres du tourbillon de Batchelor est alors fondamentale pour notre étude. L'analyse précédente semble alors montrer que les nombres d'ondes azimutaux négatifs peuvent être favorables à des couplages de modes neutres.

4.2.3 Analyse grand k

Nous nous proposons dans cette partie de comparer les modes déterminés par la méthode de shooting à une approximation WKB pour $k \gg 1$. En plus de l'intérêt de validation des résultats, cette méthode nous permet d'avoir une approximation des modes à faibles longueurs d'ondes qui ne peuvent pas être déterminées par méthode numérique. Nous allons brièvement décrire la méthode WKB (pour plus de détails Cf. Annexe) et ensuite comparer les résultats des deux méthodes.

Dans l'équation (4.5), lorsque $k \rightarrow \infty$, le terme $-\frac{k^2 \Delta}{\gamma^2}$ devient dominant, à condition que le paramètre de jet soit proportionnel à $1/k$. La méthode décrite est alors valable pour des valeurs de jet axial asymptotiquement faible. Le terme dominant doit être compensé par un terme d'oscillations rapides. L'approximation WKB grand k peut alors être vu comme suit :

$$p(r) \sim \left(p_0(r) + \frac{p_1(r)}{k} + \frac{p_2(r)}{k^2} + \dots \right) e^{k\phi(r)}, \quad (4.6)$$

où ϕ est le terme de phase. A l'ordre dominant, l'expression pour le terme de phase est obtenue :

$$\phi(r) = \pm i \int_r \sqrt{-\frac{\Delta}{\gamma^2}}. \quad (4.7)$$

A l'ordre suivant, on obtient une solution pour le terme d'amplitude $p_0(r)$:

$$p_0(r) = \sqrt{-\frac{\gamma}{r}} (-\Delta)^{1/4}$$

Si il existe un point $r = r_t$ tel que $\Delta(r) = 0$, le développement (4.6) n'est plus valide. C'est un point tournant de l'approximation WKB [123] qui est connu pour jouer un rôle particulier dans ce type d'analyse. En particulier, r_t délimite la partie oscillante de la partie exponentiellement décroissante du mode.

Après l'étude paramétrique de l'équation $\Delta(r) = 0$, deux cas sont à envisager : soit il n'existe qu'un seul point tournant r_t , soit il en existe deux r_{t_1} et r_{t_2} . Dans le premier cas, un mode est défini par N oscillations entre $r = 0$ et $r = r_t$ (mode de cœur : voir les figures 4.5 et 4.6) et la relation de dispersion associée s'écrit :

$$k = \frac{|m|\pi + 2n\pi}{2 \int_0^{r_t} \sqrt{-\frac{\Delta}{\gamma^2}}}, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}. \quad (4.8)$$

Dans le deuxième cas, un mode est caractérisé par N oscillations entre les deux points tournants r_{t_1} et r_{t_2} et est exponentiellement décroissant ailleurs (mode couronne). La relation de dispersion associée à ce type de mode s'écrit :

$$k = \frac{n\pi + \pi/2}{\int_{r_{t_1}}^{r_{t_2}} \sqrt{-\frac{\Delta}{\gamma^2}}}, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}. \quad (4.9)$$

Tant que l'on considère des fréquences réelles, les relations de dispersion (4.8) et (4.9) sont définies sur l'axe réel (*i.e.* r_t est réel). En revanche, pour les modes atténués (dus à la présence de couche critique visqueuse), r_t devient imaginaire et les relations de dispersions (4.8) et (4.9) sont alors définies dans le plan complexe. Les détails techniques sont reportés en Annexe.

Sur les figures 4.14, 4.15 sont tracés, pour différents m et différentes valeurs de kW_0 , les deux solutions satisfaisant $\Delta = 0$ dans le plan (ω, r) . Ces deux solutions peuvent s'écrire $\omega_{\pm} = (m\Omega + kW) \pm \sqrt{2\Omega\omega_0}$. La solution est alors

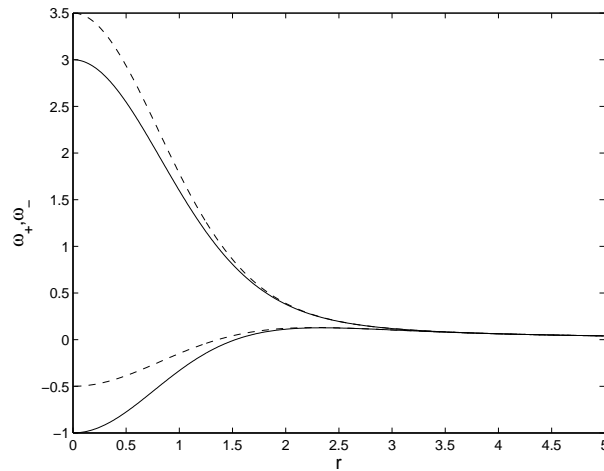


Figure 4.14: Structure spatiale de ω_+ et ω_- solution de l'équation $\Delta = 0$. 'trait plein' : $kW_0 = 0$ et 'trait discontinu' : $kW_0 = 0.5$.

oscillante dans la zone délimitée par ω_+ et ω_- ($\Delta < 0$) et évanescente en dehors ($\Delta > 0$). Ainsi, pour une fréquence donnée, la structure du mode peut être caractérisée. Sur la figure 4.15 est également tracé ω_c correspondant à la solution de l'équation $\gamma = 0$. Ainsi, pour une fréquence donnée, la présence ou non d'une couche critique visqueuse est mise en évidence. Cette courbe

permet de différencier les modes neutres des modes singuliers atténués. En particulier, sur la figure 4.14, l'effet d'un faible jet axial dans le cas $m = 1$ pour $kW_0 = 0.5$ est caractérisé. On constate que l'effet du jet n'est alors que quantitatif. Il semble donc que la structure des modes restent équivalentes et qu'uniquement l'intervalle des fréquences solutions soit légèrement modifié. Ceci est en accord avec la structure des modes représentée sur les figures 4.5 (a) et (b) et 4.6 (a) et (b).

Un étude paramétrique plus approfondie, dépendante des paramètres m

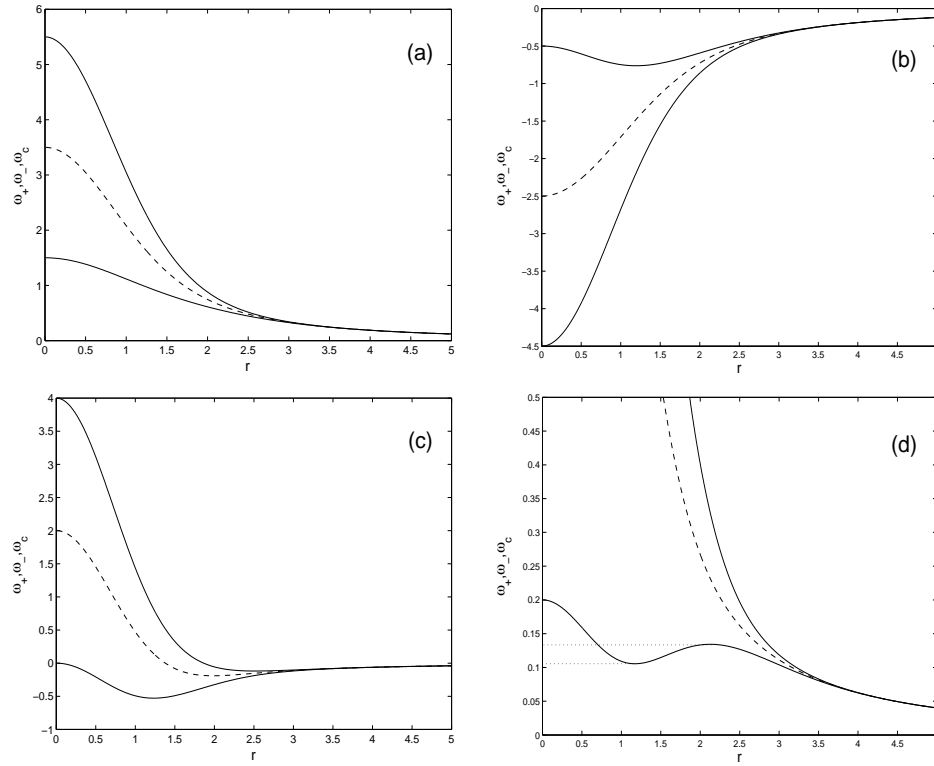


Figure 4.15: Structure spatiale de ω_+ et ω_- solution de l'équation $\Delta = 0$ ('trait continu'). Structure spatiale de ω_c solution de l'équation $\gamma = 0$. (a) : ($m = 3, kW_0 = 0.5$), (b) : ($m = -3, kW_0 = 0.5$), (c) : ($m = -1, kW_0 = 3$), (d) : ($m = 1, kW_0 = 1.2$)

et kW_0 , permet de mettre en évidence différentes structures de modes possibles. Une partie des résultats est présentée sur la figure 4.15. La valeur des paramètres correspondant à chacun des cas présentés est donnée dans la légende de la figure. Ainsi, sur la figure (a), les modes de cœur neutres correspondent aux fréquences comprises entre $\max(\omega_c)$ et $\max(\omega_+)$ alors que dans l'intervalle $[\max(\omega_-), \max(\omega_c)]$ sont mis en évidence des modes de cœur singuliers. La figure (b) est équivalente à la figure (a) mais pour une valeur de m négative. Sur les figures (c) et (d) sont mis en évidence les modes couronnes. En particulier, sur la figure (c), une fréquence ω telle que $\omega \in [\min(\omega_-), \min(\omega_c)]$ correspond à un mode couronne neutre alors que $\omega \in [\min(\omega_-), \min(\omega_c)]$ correspond à un mode couronne singulier.

Il a été noté (voir article en Annexe) que pour un mode de cœur singulier, si la couche critique r_c est bornée par deux points tournants de l'approxi-

mation WKB grand k , alors le mode est neutre. On parle alors de mode de cœur singulier neutre. Un tel cas est mis en évidence sur la figure 4.15 (b) pour une fréquence comprise entre $\min(\omega_+)$ et $\max(\omega_+)$. Une structure équivalente pour un mode couronne est représentée sur la figure 4.15 (d) lorsque la fréquence est dans l'intervalle délimité par les deux traits en pointillés. On s'attend dans cette situation à obtenir un mode couronne singulier neutre.

Après avoir caractérisé les différentes structures de modes possibles à l'aide de l'analyse des points tournants de l'approximation WKB, nous nous proposons de comparer les solutions obtenues par résolution des relations de dispersions (4.8) et (4.9) avec les fréquences solutions déterminées précédemment par méthode de shooting.

Tout d'abord, les modes neutres vont être considérés. Dans ce cas, les rela-

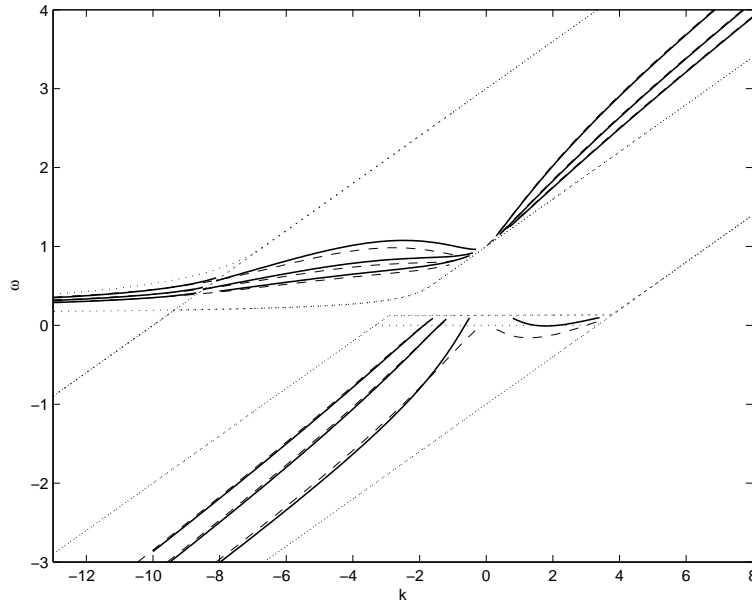


Figure 4.16: Branches solutions de l'équation (4.5) pour $m = 1$ et $W_0 = 0.3$ (ω fonction de k). Uniquement les modes neutres sont considérés. 'trait plein' : approximation WKB, 'trait discontinu' : solution numérique (shooting).

tions de dispersion sont définies sur l'axe réel. Une comparaison est présentée sur la figure 4.16 pour $m = 1$ et $W_0 = 0.3$. On constate un très bon accord entre la théorie (traits pleins) et l'intégration numérique (traits discontinus). Il est assez surprenant de remarquer que cette méthode semble donner des solutions qui restent de très bonnes approximations pour des valeurs de k relativement petites.

Pour les modes atténués la résolution des relations de dispersions (4.8) et (4.9) devient plus difficile puisqu'elles sont alors définies dans le plan complexe. Dans, ce cas un suivi des points critiques liés à la singularité non visqueuse est indispensable et rend l'étude contraignante. Nous nous sommes intéressés dans ce cas, uniquement aux modes de cœur. Un exemple de comparaison entre les solutions numériques et l'approximation WKB est

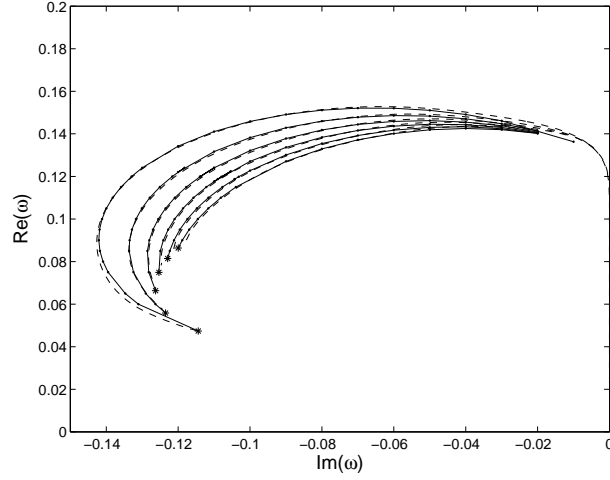


Figure 4.17: Fréquence en fonction de l'atténuation non visqueuse dans la zone de couche critique pour kW_0 variant de 0 à 0.5 (gauche-droite). 'trait plein' : approximation WKB, 'trait discontinu' : solution non visqueuse numérique (shooting).

présenté sur la figure 4.17. Sur cette figure, nous avons tracé la fréquence en fonction de l'atténuation pour $m = 1$ et kW_0 variant de 0 à 0.5. Il est à noter qu'une seule branche de la solution numérique est représentée sur la figure 4.17 pour chaque valeur de kW_0 (traits discontinus). En fait, toutes les branches obtenues par méthode de shooting se confondent avec celles représentées sur cette figure.

Dans ce paragraphe, nous avons caractérisé une grande diversité de modes présents dans le tourbillon de Batchelor. Ces modes décrit par une approximation WKB sont représentatifs des modes déterminés par analyse numérique des solutions de l'équation non visqueuse (4.5). Dans la suite, uniquement les modes de cœur neutres ou faiblement atténués seront considérés. Il s'avère, en effet, que les autres modes ne sont pas susceptibles d'intervenir dans l'instabilité elliptique.

4.3 Instabilité elliptique du tourbillon de Batchelor.

Les résultats théoriques présentés dans cette partie feront l'objet d'une comparaison avec des simulations numériques directes (DNS) [60]. Nous considérons, à présent, que le tourbillon de Batchelor (profil (4.1)) pris dans une gamme de paramètre stable ($W_0 < 0.6$) est placé dans un champ de cisaillement stationnaire de faible amplitude ε . Le champ de vitesse d'un tel écoulement peut s'écrire en coordonnées cylindriques au premier ordre en ε

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \frac{f(r)}{r} \sin 2\theta \\ r\Omega - \varepsilon \frac{f'(r)}{2} \cos 2\theta \\ W - \varepsilon \frac{f(r)W'}{2r\Omega} \cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

où le prime désigne la dérivée par rapport à r . La fonction $f(r)$ satisfait l'équation

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} - \left(\frac{4}{r^2} + \frac{3\Omega'}{r\Omega} + \frac{\Omega''}{\Omega} \right) f(r) = 0 .$$

La fonction $f(r)$ permet de décrire la variation d'étirement de l'infini jusqu'au centre du tourbillon. Elle est équivalente à la fonction définie dans le cas du tourbillon de Lamb-Oseen déformé par un champ d'étirement [90].

On peut remarquer que le champ de vitesse défini par (4.10) dans un plan orthogonal à l'axe du tourbillon (r, θ) , est le même que celui que l'on peut obtenir dans le cas du tourbillon de Lamb-Oseen. Cette analogie existe car la vitesse axiale ne dépend que de la variable r . La composante de l'équation d'Euler pour la vitesse axiale peut alors être découplée des deux autres composantes à condition de ne considérer aucune variation du champ de pression selon la direction axiale. Ainsi, les deux composantes horizontales de l'équation d'Euler sont équivalentes aux équations d'Euler pour le tourbillon de Lamb-Oseen, d'où la solution horizontale de vitesse [90]. La troisième composante se traduit alors par un équilibre des termes de transport de la vitesse verticale par la vitesse radiale et par la vitesse azimutale.

Il est maintenant connu [90, 120, 49] (et comme nous l'avons déjà mentionné) que la présence d'un champ de cisaillement bidimensionnel, stationnaire et d'ordre azimutal 2 induit sur le tourbillon une instabilité paramétrique caractérisée par la résonance de deux modes propres du tourbillon indicés 1 et 2 vérifiant

$$\omega_2 = \omega_1 \quad k_2 = k_1 \quad m_2 = m_1 \pm 2 . \quad (4.11)$$

Cette condition de résonance est une condition non visqueuse (déterminée par la structure des solutions d'équation d'Euler) ; non seulement la fréquence des modes considérés doit être la même mais les modes doivent de plus être neutres. Si une couche critique est présente dans l'un des deux modes (mode atténué), la condition (4.11) n'est plus satisfaite. En revanche si cette atténuation est très faible ($\mathcal{I}m(\omega) \sim \mathcal{O}(\varepsilon)$), alors elle peut être prise en compte comme une atténuation du taux de croissance de l'instabilité (voir sections suivantes).

Nous allons dans un premier temps nous attarder sur la description des modes résonants, leurs caractéristiques et leurs taux de croissance dans le cas où les modes sont neutres. Nous verrons ensuite l'influence d'une faible atténuation non visqueuse de couche critique. Enfin, une sélection des modes par différents processus sera discutée pour une comparaison possible avec les simulations DNS.

4.3.1 Caractérisation des modes résonants.

Il existe, *a priori*, une infinité de modes vérifiant la relation (4.11). Nous nous proposons dans le reste de cette étude de privilégier les couplages de modes principaux comme ils ont été définis par Eloy & Le Dizès [25]. Ces couplages correspondent au croisement de branches de même label i et seront définis par la suite (m_1, m_2, i) . Dans le cas du tourbillon sans jet, Eloy & Le

Dizès [25] ont montré que l'instabilité induite par la résonance de tels modes est plus grande que pour d'autres résonances. Les deux modes résonants ont, en effet, des structures radiales similaires, ce qui est propice à un taux de croissance important. De plus, dans le cas du tourbillons de Rankine avec jet axial (Cf. chapitre 3), nous avons constaté que les couplages correspondant aux modes principaux sont également les plus instables. Les caractéristiques des modes résonants principaux du tourbillon de Batchelor vont alors être suivies lorsque le paramètre W_0 est progressivement augmenté.

Les résultats que nous allons présenter correspondent à des couplages entre les modes de nombres d'onde azimutaux $(-1, 1, i)$ et $(-2, 0, i)$ pour i variant de 1 à 3. D'autres résonances ont été envisagés mais par soucis de lisibilité elles ne seront considérés que dans le résultat final.

Les nombres d'onde axiaux k et fréquence ω vérifiant la condition (4.11)

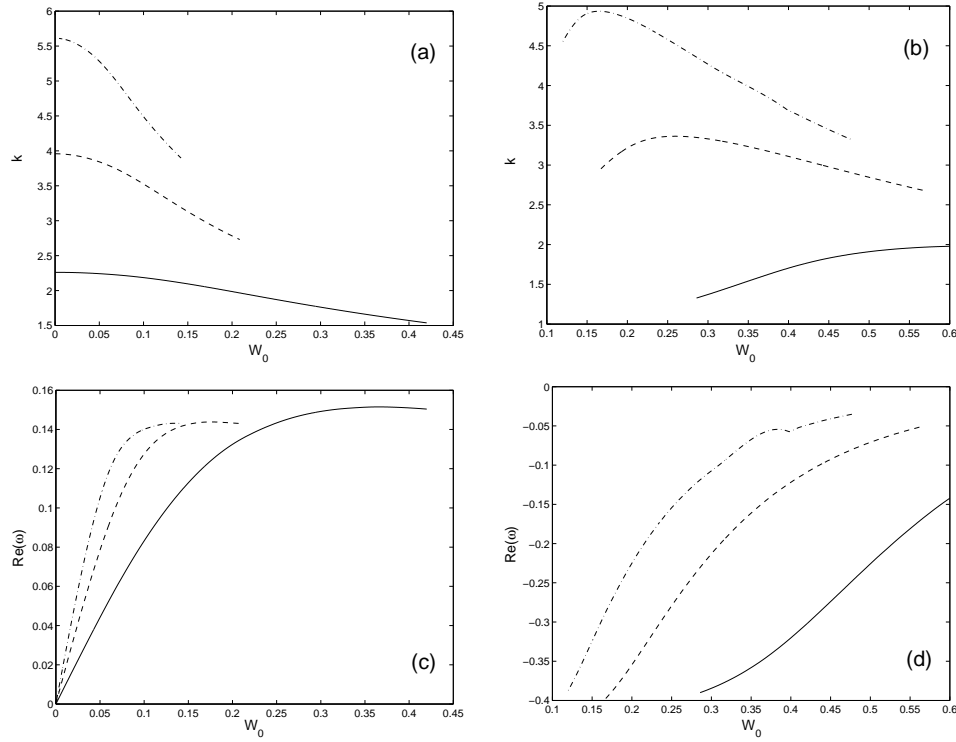


Figure 4.18: Caractéristiques des modes de couplages principaux en fonction de W_0 . $(m_1, m_2) = (-1, 1)$: (a) et (c); $(m_1, m_2) = (-2, 0)$: (b) et (d). Chaque couplage est défini par un nombre d'onde axial k ((a) et (b)) et une fréquence $\text{Re}(\omega)$ ((c) et (d)) en fonction de W_0 . Les traits 'pleins', 'discontinus' et 'mixte' correspondent au trois premiers croisements $i = 1, 2, 3$ respectivement.

pour les trois premiers modes principaux sont présentés sur la figure 4.18 en fonction de W_0 . La recherche des croisements a été arrêtée lorsque l'atténuation d'un des deux modes atteignait la valeur $\text{Im}(\omega) = -0.04$ (figure 4.19). Nous considérerons qu'au delà de cette valeur, le critère d'instabilité (4.11) n'est plus satisfait. De plus, uniquement les valeurs de jet axial telles que $W_0 < 0.6$ sont considérés dans cette étude pour écarter le mode instable de Kelvin-

Helmholtz comme mentionné précédemment.

Lorsque $W_0 = 0$, nous retrouvons bien les résultats du tourbillon de Lamb-

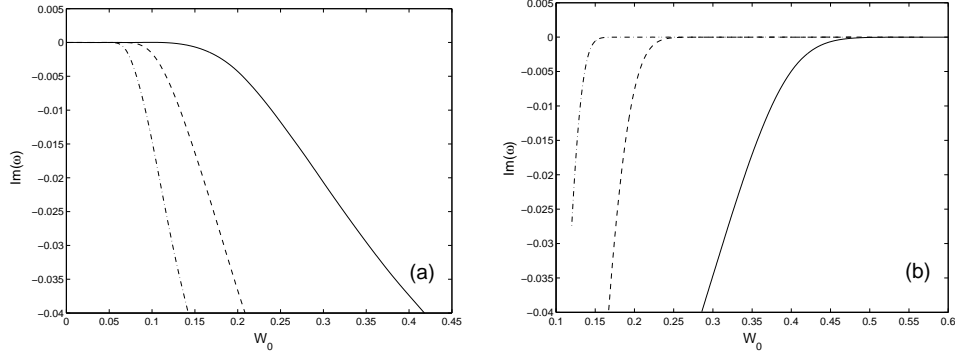


Figure 4.19: Atténuation non visqueuse d'un des deux modes de couplage dont les caractéristiques sont présentées figure 4.18 : l'autre mode étant neutre. (a) : $m = 1$ et (b) : $m = -2$. Pour la légende des courbes, voir figure 4.18.

Oseen déjà connus [23, 110] (figure 4.18 (a) et (b)). On peut remarquer que pour $W_0 = 0$, seuls les modes résonants $(m_1, m_2) = (-1, 1)$ ⁴ sont présents. Toute autre résonance a un des deux modes atténué par la présence d'une couche critique.

Lorsque W_0 augmente, d'autres couplages de modes apparaissent (figures 4.18 (b) et (d)) tandis que l'atténuation du couplage $(m_1, m_2) = (-1, 1)$ augmente (figure 4.19 (a)). Pour des valeurs de W_0 suffisamment grandes, l'atténuation des modes couplés différents de $(-1, 1)$ diminue (par exemple le couplage $(-2, 0)$ figure 4.19 (b)) alors que les modes $(-1, 1)$ ne résonne plus (figures 4.18 (a) et (c)). A priori, la résonance de modes différents de $(-1, 1)$ dans une zone où les deux modes sont neutres n'est pas possible (figure 4.8), sauf pour $\mathcal{R}e(\omega) = 0$. En revanche, il existe des valeurs de W_0 pour lesquelles l'atténuation est très faible lorsque le point critique est loin du cœur. Ces modes sont neutres au premier ordre dans l'analyse WKB. Dans le cas de couplage $(-2, 0)$, l'intervalle de fréquence déterminé par l'analyse WKB qui correspond à ces modes singuliers neutres est visible sur la figure 4.20. On peut ainsi prédire lorsque le couplage de deux modes sera neutre ou non.

Pour le tourbillon de Rankine avec jet [57], nous avons vu que les couplages les plus instables sont ceux qui vérifient la condition

$$\omega - kW_0 = \frac{m_1 + m_2}{2}. \quad (4.12)$$

Cette condition satisfaite en tout point du cœur dans le cas du tourbillon de Rankine ne peut être vérifiée qu'en certains points r dans le cas de profil continu. L'instabilité elliptique ayant toujours été définie comme une instabilité de cœur, nous allons nous intéresser par la suite, pour le profil de Batchelor, aux cas où la condition (4.12) est vérifiée en $r = 0$. Sur la figure 4.21 est tracé $\omega - kW_0$ en fonction de W_0 pour les couplages présentés

⁴ lorsque le label i n'est pas précisé, alors le résultat présenté est vrai pour tout i

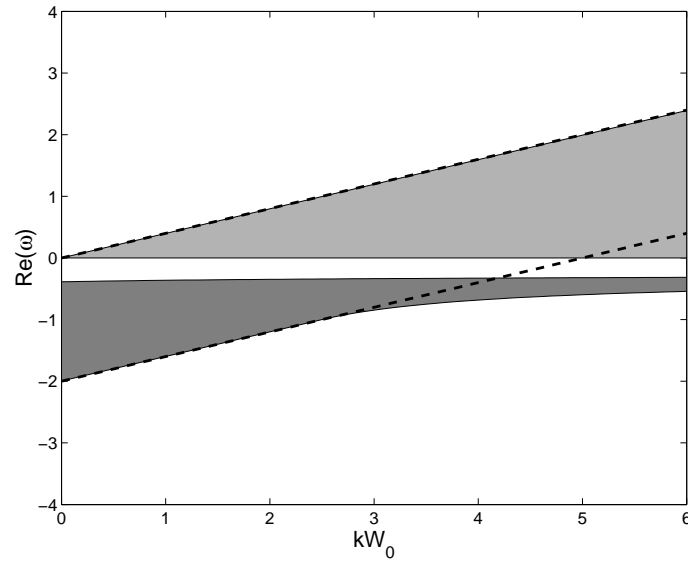


Figure 4.20: Zones de couche critique pour le couplage $(-2, 0)$ (ω fonction de k). gris clair : $m = 0$, gris foncé : $m = -2$ et blanc : zone de modes neutres. Les 'traits discontinus' délimitent la zone où un couplage de modes $(-2, 0)$ est possible.

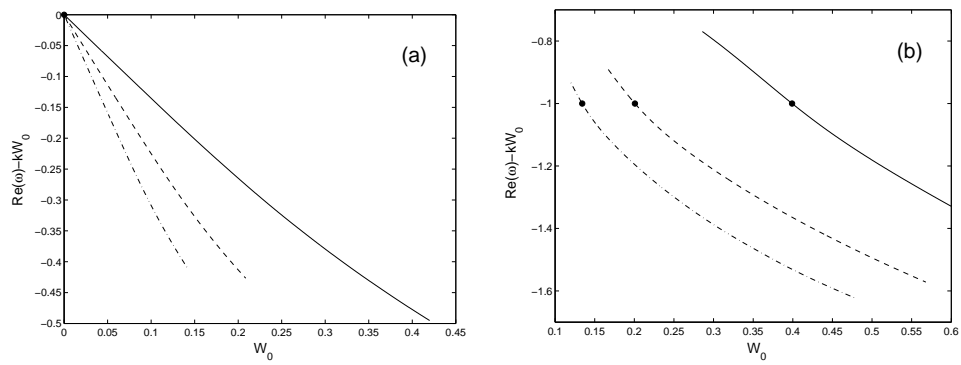


Figure 4.21: Fréquence dans le référentiel lié au jet au centre du tourbillon pour $(1, 1, i)$ et $(-2, 0, i)$.

précédemment. On constate qu'il existe systématiquement une valeur de jet pour laquelle la condition (4.12) est satisfaite (cercles noirs). De plus, pour des fréquences de couplages proche de la condition (4.12), les modes sont neutres (figure 4.19). Cette tendance semble favorable à un taux de croissance important.

4.3.2 Instabilité elliptique des modes neutres.

Le couplage des modes (m_1, m_2) décrit dans la section précédente avec le champ d'étirement induit une instabilité dont le taux de croissance est fonction de la gamme de paramètres considérée. Dans le cas d'un tourbillon de Lamb-Oseen contraint par un champ d'étirement bidimensionnel équivalent à celui de la solution 4.10 lorsque $r \rightarrow \infty$, Eloy & Le Dizès [24] ont calculé le taux de croissance et montré que ce taux de croissance adimensionné par le cisaillement au centre du tourbillon est proche de la valeur $9/16\varepsilon$. Cette valeur peut être déterminée par une analyse locale [8] pour de grands nombres d'ondes lorsque le champ de contrainte est constant dans le cœur du tourbillon. Nous nous proposons maintenant d'étendre ces résultats au cas du tourbillon avec jet axial. La discussion de l'approximation asymptotique du taux de croissance pour des grands nombres d'onde sera "faite" en détail dans le chapitre suivant. Nous allons d'abord nous intéresser au taux de croissance de l'instabilité pour des nombres d'onde d'ordre 1.

Cette étude s'appuie sur les méthodes décrites dans les travaux de Moore & Saffman [90], Tsai & Widnall [120] et Eloy & Le Dizès [24]. Les équations d'Euler linéarisées autour de l'écoulement de base (4.10) peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{J} \mathbf{u}' + \mathcal{M} \mathbf{u}' = \varepsilon \left(\mathcal{N} e^{2i\theta} + \bar{\mathcal{N}} e^{-2i\theta} \right) \mathbf{u}', \quad (4.13)$$

avec $\mathbf{u}' = (u', v', w', p')$. Les matrices \mathcal{J} , \mathcal{M} et \mathcal{N} s'écrivent

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} T_1 & -2\Omega & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ \omega_0 & T_1 & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ W' & 0 & T_1 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} T_2 + T_3 & 2\frac{f}{r^2} - \frac{1}{r}f' & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}f'' + \frac{1}{2r}f' & T_2 + \bar{T}_3 & 0 & 0 \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{fW'}{2\Omega r} \right) & \frac{ifW'}{\Omega r^2} & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $T_1 = \Omega \frac{\partial}{\partial \theta} + W \frac{\partial}{\partial z}$, $T_2 = -i\frac{f}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{f'}{2r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{fW'}{2\Omega r} \frac{\partial}{\partial z}$ et $T_3 = -\frac{i}{r}f' + i\frac{f}{r^2}$.

Le membre de gauche de l'équation (4.13) représente le transport d'une perturbation par l'écoulement de base non déformé (4.1). ϵ étant petit, au premier ordre de l'étude asymptotique, nous retrouvons le système (4.4). Les modes solutions de ce système ont été décrit dans la section précédente. A l'ordre ϵ , un couplage entre deux modes normaux satisfaisant (4.11) et le champ d'étirement est possible. Ce couplage est représenté par la matrice \mathcal{N} . On constate alors (voir équation (4.13)) qu'un écoulement d'ordre ϵ est engendré par ce couplage. Le cadre de l'étude étant temporelle, un couplage de modes normaux solution de (4.13) peut s'écrire

$$\mathbf{u} = (A_{m_1}\mathbf{u}_{m_1} + A_{m_2}\mathbf{u}_{m_2})e^{\epsilon\sigma t} + \epsilon\mathbf{v} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

σ est *a priori* un complexe dont la partie réelle représente le taux de croissance de l'instabilité.

Une condition de solvabilité permet d'obtenir deux équations pour les amplitudes A_{m_1} et A_{m_2} en définissant les modes adjoints grâce au produit scalaire

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_0^\infty (\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) r dr.$$

L'adjoint (u_a, v_a, w_a, p_a) d'un mode (u, v, w, p) est alors déterminé par la résolution de l'équation

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_a}{\partial r^2} + A_a(r) \frac{\partial \bar{p}_a}{\partial r} + B_a(r) \bar{p}_a = 0, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} A_a(r) &= -\frac{\Delta'}{\Delta} + \frac{2\gamma'}{\gamma} + \frac{1}{r}, \\ B_a(r) &= \frac{\Delta'}{\Delta} \left(\frac{W'k}{\gamma} + \frac{m\omega_0}{\gamma r} \right) - \frac{W''k}{\gamma} - \frac{m\omega'_0 + W'k}{\gamma r} \\ &\quad - \frac{m^2}{r^2} - \frac{2\Omega W'km}{r\gamma^2} - \frac{k^2\Delta}{\gamma^2}. \end{aligned}$$

Le taux de croissance est obtenu en écrivant la condition de solvabilité et peut s'écrire après simplification :

$$\sigma = \left(\frac{\bar{\mathcal{N}}_{12}\mathcal{N}_{21}}{\mathcal{J}_{11}\bar{\mathcal{J}}_{22}} \right)^{1/2}, \quad (4.15)$$

où $\mathcal{X}_{ij} = \langle \mathbf{u}_a(m_i), \mathcal{X} \mathbf{u}(m_j) \rangle$.

La fonction σ est représenté sur la figure 4.22 pour les modes résonants

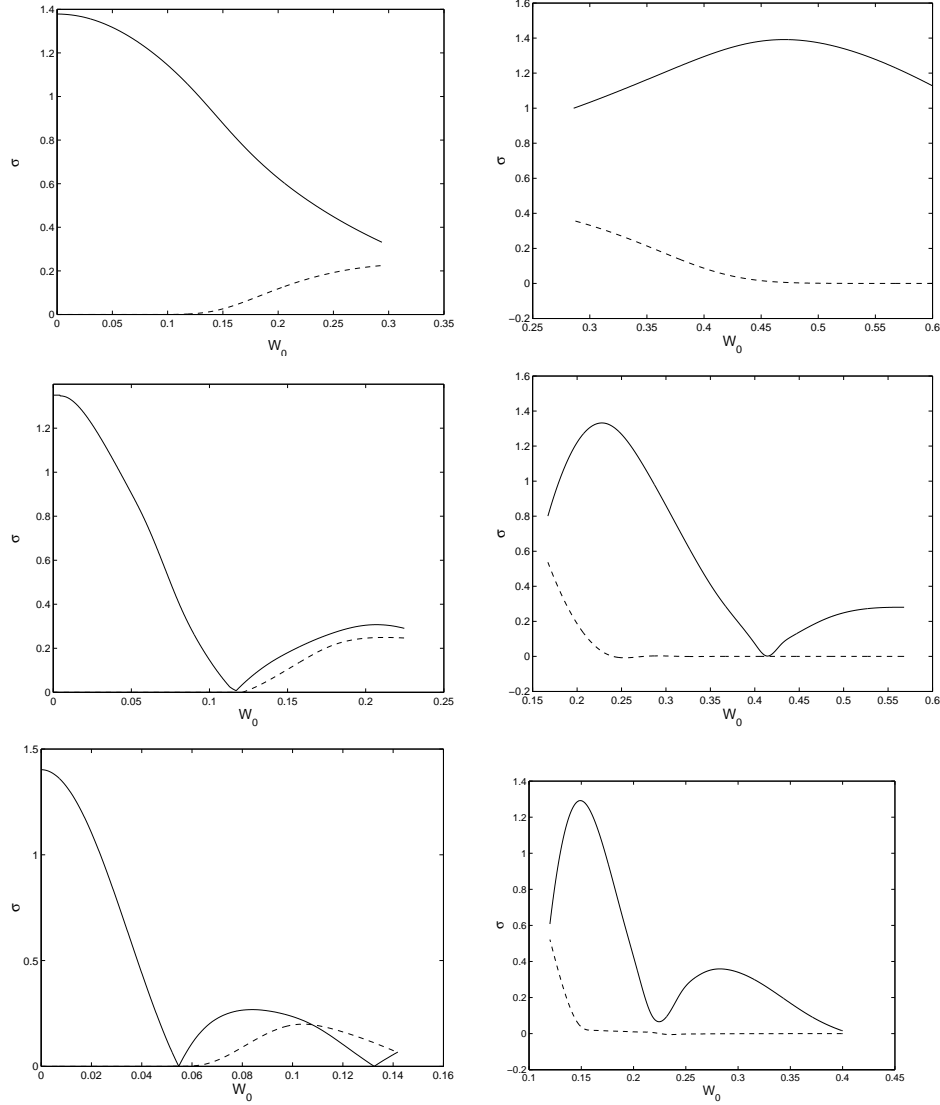


Figure 4.22: σ défini par l'équation (4.15) pour les couplages de la figure 4.18. 'trait plein' : $\mathcal{Re}(\sigma)$ (taux de croissance), 'trait discontinu' : $\mathcal{Im}(\sigma)$ (déphasage). figures de gauche : $(-1, 1, i)$ et figures de droite : $(-2, 0, i)$ avec $i = 1, 2, 3$ de haut en bas.

dont les caractéristiques sont tracées sur les figures 4.18 et 4.19. Nous avons considéré jusqu'à présent le terme d'atténuation des modes dû aux couches critiques négligeable et il n'a donc pas été pris en compte dans la détermination du taux de croissance. L'effet de cette atténuation sera brièvement décrit dans la prochaine section.

Nous remarquons sur la figure 4.22 que la solution σ de l'équation (4.15) est réelle pour une certaine gamme de valeurs de jet axial. Il existe, en revanche, des zones où σ possède une partie imaginaire. Ces zones correspondent à la présence de couche critique (figure 4.19). Ainsi, dans la zone de couche cri-

tique, l'interaction de deux modes avec le champ de cisaillement va induire une modification de fréquence de ces modes.

Pour les nombres d'ondes considérés, les taux de croissance maximum pour les différents couplages (m_1, m_2) sont comparables (figure 4.22). De plus, cette valeur est du même ordre de grandeur que pour le cas du tourbillon de Lamb-Oseen ($W_0 = 0$). Un jet axial ne semble donc pas être défavorable à l'apparition de l'instabilité elliptique.

Nous pouvons également noter que comme nous l'avons mentionné précédemment le taux de croissance est maximum lorsque la condition (4.12) est quasiment satisfaite. Cette condition traduit un couplage en phase proche de $r = 0$. Cela signifie que pour des valeurs de k modérés la contribution dominante de l'instabilité elliptique semble être proche du cœur.

4.4 Sélection des modes les plus instables.

Nous avons vu dans la section précédente que les taux de croissance non visqueux des différents couplages de modes considérés sont du même ordre de grandeur. Ormis le paramètre de jet, il semble alors nécessaire de tenir compte des effets qui peuvent favoriser la déstabilisation de certains modes par rapport à d'autres. Dans ce but, les termes de viscosité, d'atténuation de couche critique et un écart par rapport au nombre d'onde axial résonant vont être introduit dans le problème. La prise en compte d'une modification du nombre d'onde axial est intéressante dans le cas de comparaison avec les simulations DNS pour lesquelles le nombre d'onde adimensionné ka varie au cours du temps. a représente, en effet, le rayon du tourbillon, considéré comme fixe au cours du temps dans notre analyse mais qui varie due à la viscosité dans la simulation (voir introduction du chapitre). De plus, nous savons que les modes de petites longueurs d'ondes sont plus rapidement dissipés par la viscosité que les autres modes. On peut en effet montrer que la dissipation volumique d'un mode lorsque k est grand est d'ordre $\frac{k^2}{Re}$. Dans le but de tenir compte de cette tendance un terme de viscosité peut être ajouté en supposant que $Re \sim \mathcal{O}(1/\varepsilon)$. Dans ce cas, l'hypothèse de tourbillon figé faite au début du chapitre n'est plus satisfaite. Nous admettrons par la suite que cette hypothèse reste vrai et que le terme de viscosité n'est qu'un terme de sélection de longueurs d'ondes privilégiés. Cela paraît peu contraignant si le nombre de Reynolds reste supérieur à ε . On observera d'ailleurs par la suite que pour Re très grand par rapport à ε (cas où l'hypothèse de tourbillon figé est vérifié), la viscosité continue à sélectionner les modes à grandes longueurs d'ondes.

En tenant compte des trois effets décrit ci-dessus, les deux équations d'amplitudes des deux modes résonants A_{m_1} et A_{m_2} , mentionnées précédemment, s'écrivent :

$$\begin{aligned} A_{m_1} \left(\sigma \mathcal{J}_{11} + ik_\varepsilon \mathcal{Q}_{11} - \frac{1}{\varepsilon Re} \mathcal{L}_{11} - \frac{\mathcal{I}m(\omega)}{\varepsilon} \mathcal{J}_{11} \right) &= A_{m_2} \bar{\mathcal{N}}_{12} , \\ A_{m_2} \left(\sigma \mathcal{J}_{22} + ik_\varepsilon \mathcal{Q}_{22} - \frac{1}{\varepsilon Re} \mathcal{L}_{22} \right) &= A_{m_1} \mathcal{N}_{21} . \end{aligned}$$

Le nombre d'onde a été développé comme : $k = k_0 + \varepsilon k_\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. k_0 est le nombre d'onde pour laquelle les deux modes vérifient la condition de résonance (4.11). Les termes \mathcal{Q}_{11} et \mathcal{Q}_{22} sont déterminés grâce à la matrice

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} W & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les termes \mathcal{L}_{11} et \mathcal{L}_{22} sont calculés de la même manière que Eloy & Le Dizès [25].

Ces trois effets sur le taux de croissance de l'instabilité sont étudiés indépendamment sur les figures 4.23, 4.24 et 4.25. Dans ces trois cas, σ représente le taux de croissance pour lequel deux des trois termes stabilisants ont été supprimés.

Sur la figure 4.23, l'atténuation de couche critique est mise en évidence.

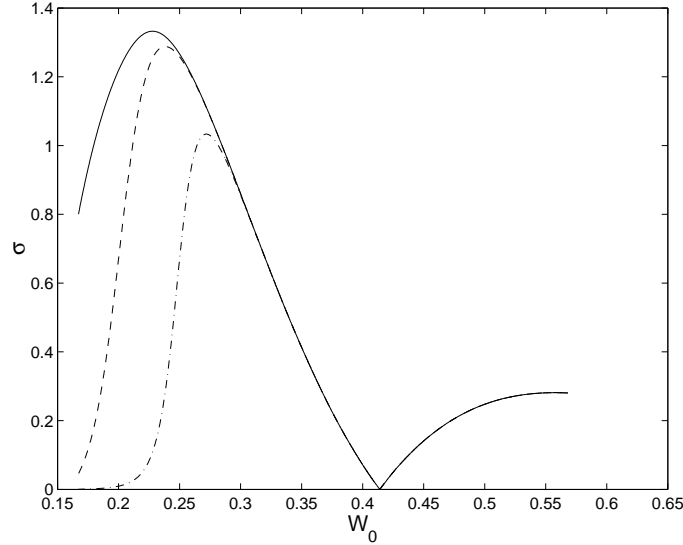


Figure 4.23: Effet de l'atténuation non visqueuse liée à la singularité $\gamma = 0$ sur le taux de croissance de l'instabilité pour le couplage $(-2, 0, 2)$. 'trait plein' : solution de la figure 4.22, 'trait discontinu' : $\varepsilon = 0.01$ et 'trait mixte' : $\varepsilon = 0.0001$.

On constate que plus ε est faible, plus le taux de croissance est faible dans la zone de couche critique. Cela signifie que pour déstabiliser un mode de couche critique, le taux de déformation doit être suffisamment important pour contre balancer l'atténuation non visqueuse liée à la couche critique.

L'effet de la dissipation visqueuse est mis en évidence sur la figure 4.24. Comme dans le cas du tourbillon de Rankine (voir chapitre précédent) et comme cela a été montré dans de nombreux travaux [25], la diffusion privilégie les modes de branches de label i petit, *i.e.* dont la structure radiale est la plus simple.

L'effet de la variation temporelle de la taille du cœur a été envisagé par Eloy & Le Dizès [24]. Nous n'allons pas ici nous intéresser à cette varia-

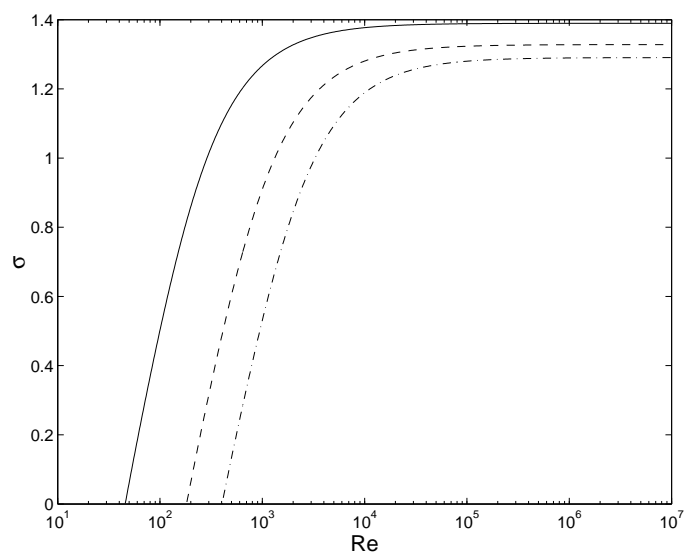


Figure 4.24: Effet de la viscosité sur le maximum du taux de croissance des trois couplages $(-2, 0)$ de la figure 4.22 pour $\varepsilon = 0.1$. 'trait plein' : $W_0 = 0.47$ et $i = 1$, 'trait discontinu' : $W_0 = 0.24$ et $i = 2$, 'trait mixte' : $W_0 = 0.15$ et $i = 3$

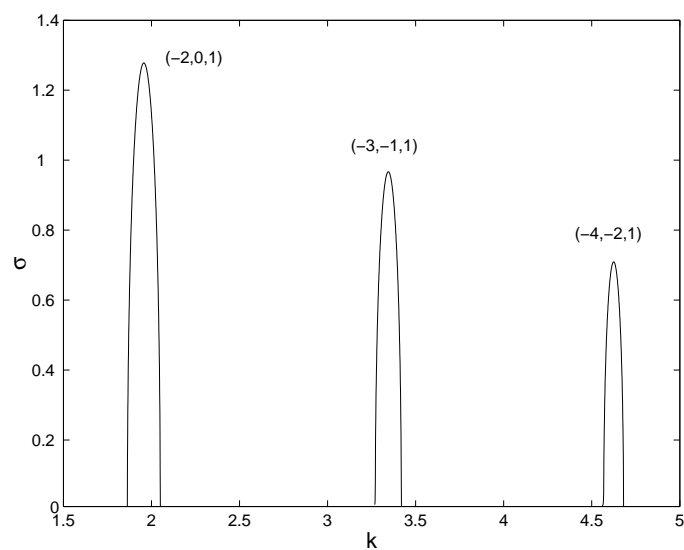


Figure 4.25: "Bande d'instabilité" des modes principaux pour $W_0 = 0.55$ et $\varepsilon = 0.1$.

tion temporelle mais uniquement déterminer l'effet d'un écart sur le nombre d'onde axial. Les "bandes" d'instabilité comme fonction de k ont déjà été déterminées dans le cas de résonance $(-1, 1)$ pour le tourbillon de Lamb-Oseen [112, 63]. Nous avons étendu ce résultat au cas du tourbillon de Batchelor. Un des résultats correspondant à cette étude est présenté sur la figure 4.25 pour $W_0 = 0.55$ et $\varepsilon = 0.1$. On constate que pour k variant de 1.5 à 5, il existe trois zones d'instabilité correspondant à trois couplages d'ondes azimuthales différents. Il est à noter que pour cette valeur de jet axial, les nombres d'onde résonants ne fournissent pas le taux de croissance optimal. En effet, il existe pour les modes $(-3, -1, 1)$ et $(-4, -2, 1)$ des valeurs de W_0 pour lesquelles le taux de croissance est plus grand. Ceci explique la différence du maximum de taux de croissance pour les différentes résonances de la figure 4.25.

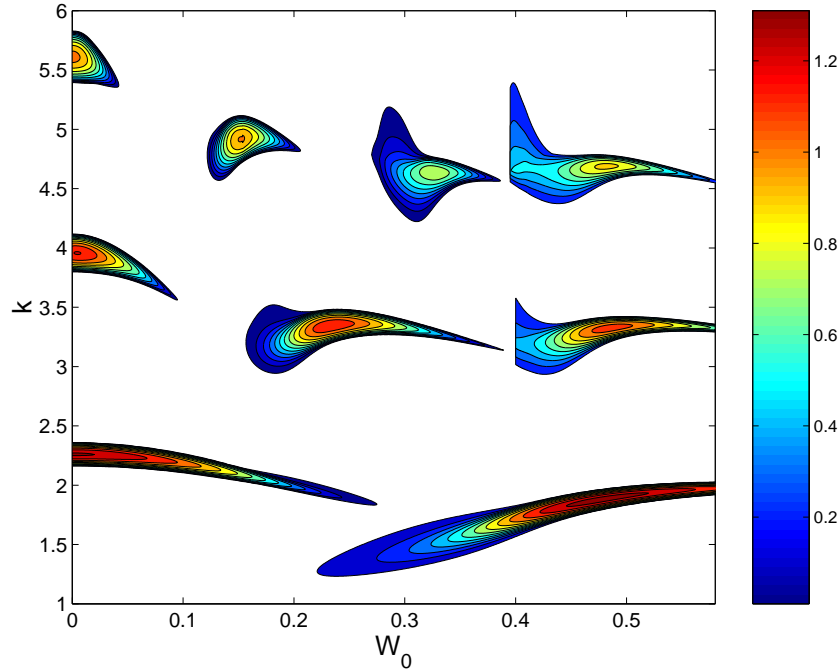


Figure 4.26: Zones d'instabilité des modes principaux dans un plan (W_0, k) . Le dégradé de couleur correspond à l'intensité du taux de croissance (du bleu vers le rouge : du minimum au maximum) pour $Re = 20\,000$ et $\varepsilon = 0.01$.

On est maintenant en mesure de déterminer les zones possibles d'instabilité dans un plan (W_0, k) lorsque les trois termes d'atténuations sont pris en compte. Sur la figure 4.26, ces zones sont mise en évidence pour les paramètres suivants : $Re = 20\,000$ et $\varepsilon = 0.01$. Les couleurs représentent l'intensité du taux de croissance croissante du bleu vers le rouge. L'effet du nombre de Reynolds et du paramètre ε sur ces zones d'instabilité est mis en évidence sur les figures 4.27 et 4.28. Ce type de graphique s'avère intéressant pour les simulations numériques directes pour lesquelles deux des paramètres de la condition initiale sont la longueur d'onde axiale et le paramètre de jet.

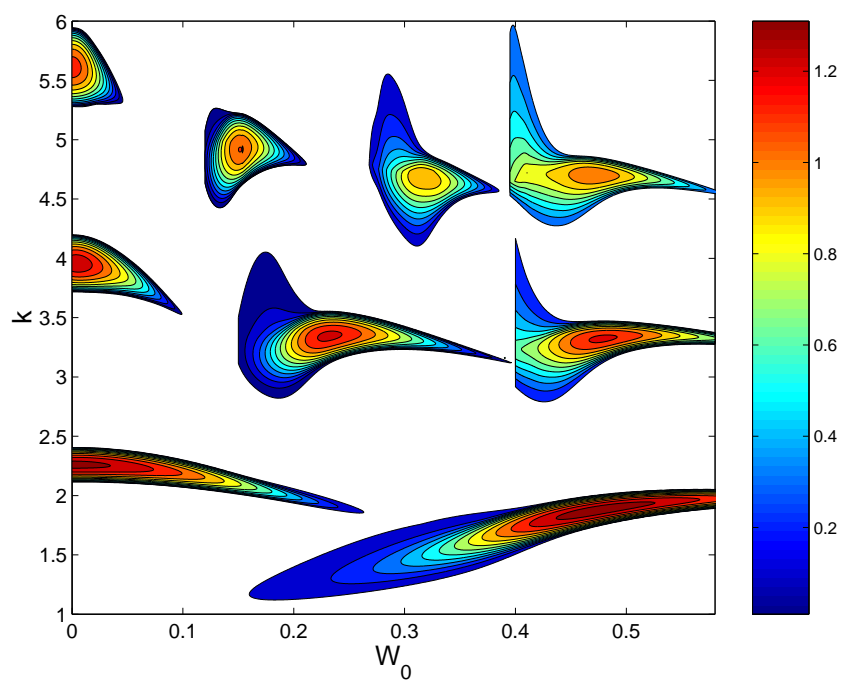


Figure 4.27: Identique à la figure 4.26 pour $Re = 20\,000$ et $\varepsilon = 0.015$.

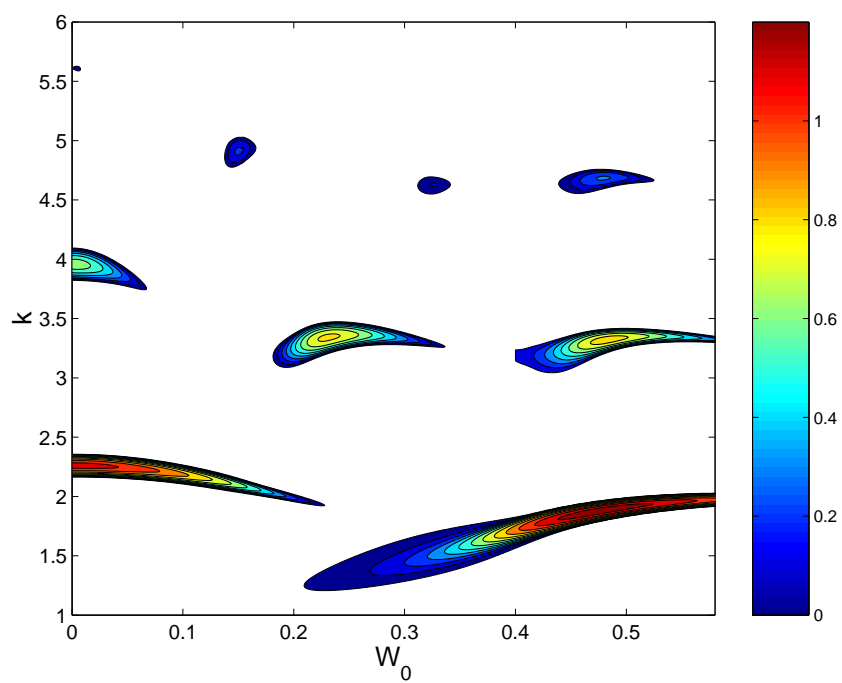


Figure 4.28: Identique à la figure 4.26 pour $Re = 5\,000$ et $\varepsilon = 0.01$.

4.5 Comparaison DNS

Les prédictions théoriques sur l'instabilité d'un tourbillon isolé dans un champ de cisaillement bidimensionnel présentées dans ce chapitre sont maintenant comparées avec des simulations numériques directes (DNS) réalisées par Kris Ryan ⁵. Ce code DNS simule la dynamique de deux tourbillons de Batchelor contra-rotatifs. Chaque tourbillon induit sur l'autre un champ d'étirement bidimensionnel et stationnaire dans le référentiel advecté avec les deux tourbillons. Chaque tourbillon isolé peut alors être modélisé, dans ce référentiel, par le tourbillon elliptique présenté précédemment. Une telle approche a été validée pour des tourbillons sans jet [112, 70]. Nous nous proposons, ici, de vérifier que les couplages de modes décrits dans l'analyse d'un tourbillon isolé lorsque le paramètre de jet varie rendent effectivement la dynamique de deux tourbillons de Batchelor contra-rotatifs instable. Une comparaison des taux de croissance peut aussi être envisagée.

Les paramètres de la simulation numérique sont : b la distance entre les cœurs des deux tourbillons, a le rayon des tourbillons et Γ la circulation de chaque tourbillon. Les deux paramètres adimensionnelles définis au début de ce chapitre Re et ε s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} Re &= \frac{\Gamma}{2\pi\nu}, \\ \varepsilon &= \frac{a^2}{b^2}. \end{aligned}$$

Une des contraintes de la simulation DNS, hormis la limitation pour les nombres de Reynolds est la définition de taille de "boîte". En effet, ce type de simulation résout les équations de Navier-Stokes sur un domaine fini. Dans le plan horizontal, perpendiculaire à l'axe du tourbillon (x, y) , un domaine fini n'est pas une contrainte, en revanche le tourbillon est "coupé" dans la direction verticale. Ainsi, la hauteur du domaine en fonction de la taille des cœurs des tourbillons est une restriction sur la gamme de longueurs d'ondes qui peuvent être excitées. La figure 4.26 est donc nécessaire pour définir les conditions initiales des simulations numériques (dans le but d'obtenir les taux de croissance maximum).

Les résultats d'une simulation pour $W_0 = 0.233$ et $ka(t = 0) = 3.15$ sont présentés sur les figures 4.29 et 4.30.

Cette simulation met en évidence l'apparition d'une instabilité au cours du temps. L'apparition d'une structure spatiale cohérente est identifiée sur les figures 4.29 et 4.30. Sur ces figures sont tracés la vorticité verticale de la perturbation. D'après la figure 4.26, le mode exc t  serait le couplage $(-2, 0, 2)$. La structure du mode observé dans la simulation DNS dans un plan horizontal (figure 4.29) semble concorder avec cette prédiction. En effet, la visualisation (b) met en évidence quatre bulles de vorticité dans la direction azimutale. Cette structure est bien une structure d'ordre $m = \pm 2$ dans la direction azimutale.

Les croissance temporelles de l'instabilité obtenu par simulation DNS de

⁵ Actuellement en post-doc dans l'équipe 'vortex' à l'IRPHE. Le code a été développé dans l'équipe de Kerry Hourigan et Mark Thompson (Monash University, Melbourne).

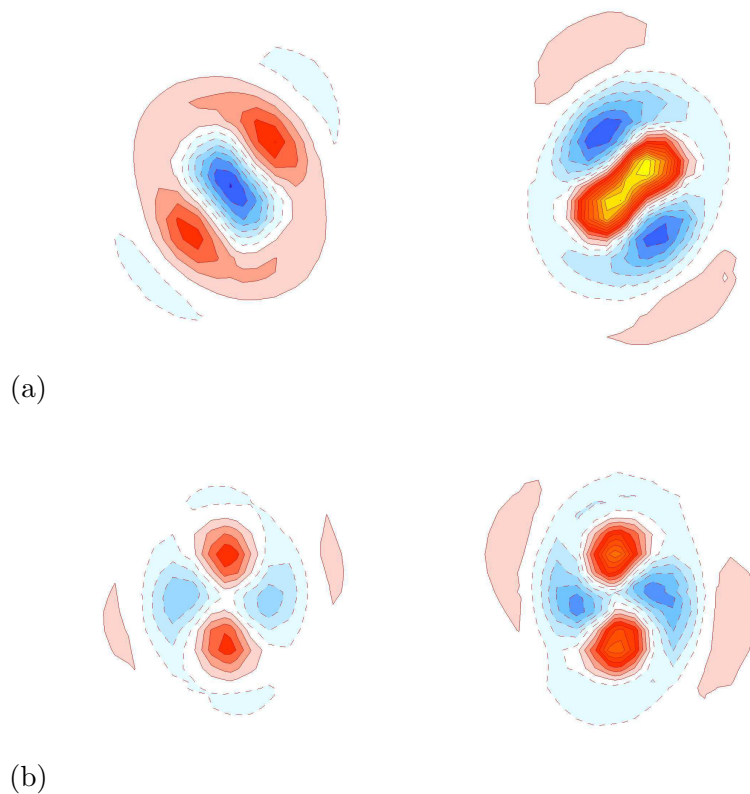


Figure 4.29: Structure de la vorticité axiale du couplage de modes instable dans deux plans perpendiculaires à l'axe du tourbillon et distants de $\lambda/4$ (λ est la longueur d'onde). rouge : vorticité positive, bleu : vorticité négative.

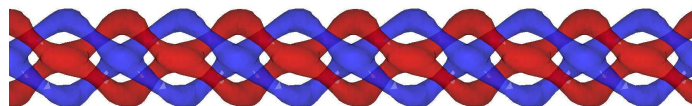


Figure 4.30: Iso contour de la vorticité axiale de la perturbation : rouge : vorticité positive, bleu : vorticité négative.

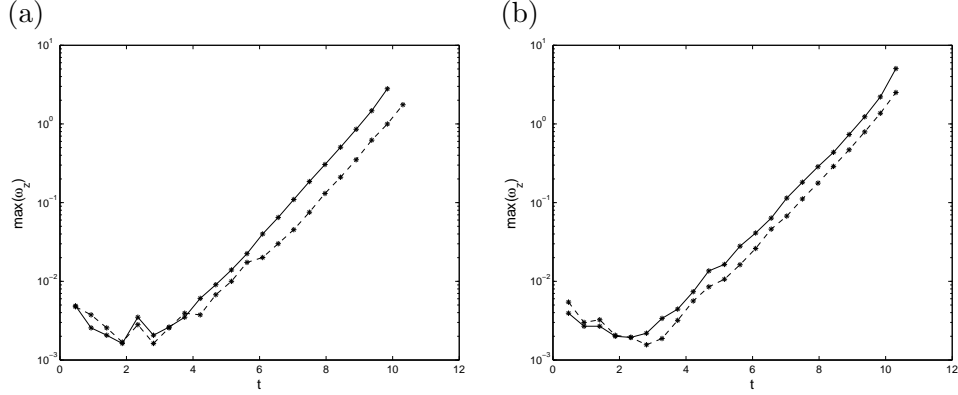


Figure 4.31: Evolution temporelle du maximum de la vorticité axiale de la perturbation pour les simulations DNS. (a) : $W_0 = 0$, $ka \sim 2.26$ et (b) : $W_0 = 0.23$ et $ka \sim 3.35$.

deux tourbillons contra-rotatifs sont tracés sur la figure 4.31. Pour cela, le maximum de la vorticité axiale dans tout le domaine de calcul en fonction du temps a été mesuré. Cette figure met en évidence un taux de croissance exponentiel. Les deux cas considérés sont des simulations dont les conditions initiales sont : $W_0 = 0$, $ka_0 = 2.2$ (a) et $W_0 = 0.23$, $ka_0 = 3.15$ (b). La théorie prédit dans ces cas une déstabilisation des couplages $(-1, 1, 1)$ (a) et $(-2, 0, 2)$ (b). Pour le cas $(-2, 0, 2)$, ce résultat est cohérent avec la structure de la perturbation observée (figures 4.29 et 4.30). Dans le cas $(-1, 1, 1)$, le résultat obtenu est en accord avec des études déjà menées sur l'instabilité elliptique du tourbillon de Lamb-Oseen [63]. Cette simulation a permis de valider le code.

Une comparaison des taux de croissance de la prédiction théorique et des si-

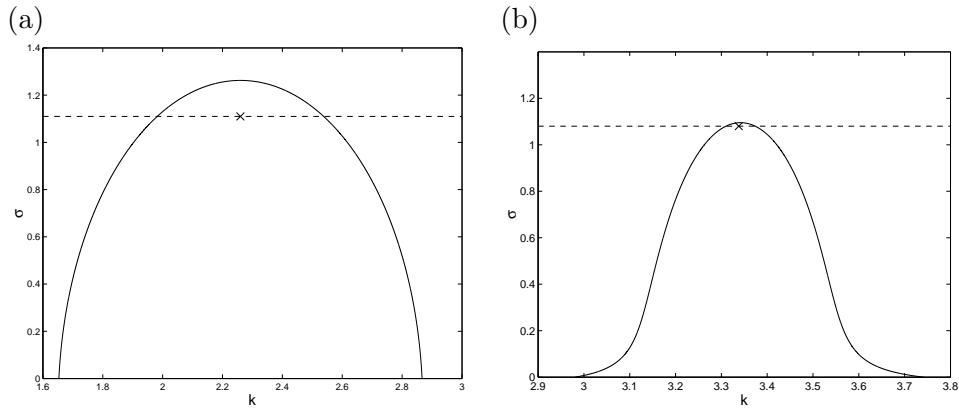


Figure 4.32: Comparaison théorie-DNS des taux de croissance en fonction de k pour $W_0 = 0$ (a) et $W_0 = 0.23$ (b). Le 'trait discontinu' correspond au taux de croissance de la simulation DNS ('x' : estimation du nombre d'onde axiale au début de la croissance d'énergie, $t \sim 4$). le 'trait plein' correspond à la prédiction théorique du taux de croissance du couplage de modes pour les mêmes paramètres

mulations numériques est présenté figure 4.32. La valeur obtenue par la simu-

lation numérique est marquée par le 'trait discontinu' alors que la prédiction théorique est en 'trait plein' pour les différentes valeurs du nombre d'onde axiale autour du maximum du mode instable considéré. La croix correspond à la valeur $k_c = ka$ lorsque l'énergie du mode commence à croître. L'accord paraît bon étant donné les faibles nombres de Re qui peuvent être considérés pour ce type de simulation. Nous pouvons, en effet, rappeler que l'étude théorique menée dans ce chapitre est justifiée pour de grands nombres de Re . Ces résultats DNS ne sont que préliminaires et feront l'objet d'une étude plus approfondie dans le futur.

Nous pouvons tout de même souligner le très bon accord qu'il existe pour les structures des modes entre la simulation et l'estimation théorique. Par exemple, nous avons représenté sur la figure 4.33, un tourbillon qui développe une instabilité liée à la résonance des modes $(-2, 0, 1)$ dans les cas du tourbillon de Rankine (gris) et de la simulation DNS pour le tourbillon de Batchelor (rouge). Pour le tourbillon de Rankine, nous avons tracé la déformation de l'enveloppe du tourbillon qui correspond à la séparation entre le cœur et l'écoulement extérieur potentielle. Dans le cas de la simulation DNS, un iso-contour de vorticité a été représenté.

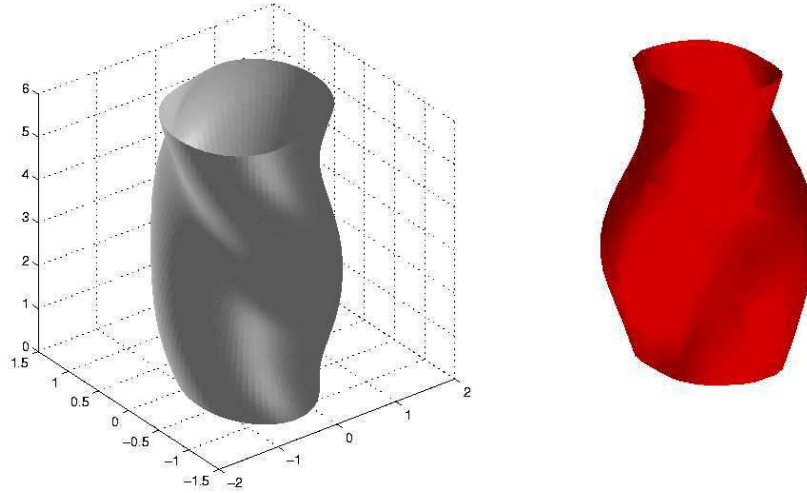


Figure 4.33: Déformation d'un tourbillon soumis à un champ d'étirement. Résultats qualitatifs sur la forme de l'interaction des modes $m = 0$ et $m = -2$.

5. ESTIMATION ASYMPTOTIQUE DE L'INSTABILITÉ ELLIPTIQUE

Nous avons constaté que les modes obtenus par l'approximation WKB (grand nombre d'onde) sont comparables aux résultats numériques autant par les valeurs des fréquences que par la structure radiale. Ces comparaisons se sont avérées être toujours en bon accord pour des nombres d'ondes d'ordre un. Il semble donc envisageable à ce stade de comparer les taux de croissance associés aux couplages de ces modes asymptotiques et d'une déformation elliptique, avec les résultats numériques présentés précédemment.

De plus, la méthode semi-numérique utilisée dans le chapitre précédent contraint l'étude à des valeurs de nombres d'ondes modérées ($k \sim \mathcal{O}(1)$). Nous savons que la sélection des modes instables va être pilotée par le terme de viscosité. Il semble donc pertinent de ne considérer que des couplages de modes de longueurs d'ondes modérées qui sont les moins atténués par la viscosité. Cette limitation est adaptée pour les comparaisons théorique-DNS (Cf. chapitre précédent) pour lesquelles l'analyse est limitée à des nombres de Reynolds relativement faibles. En revanche, dans le cadre d'application en aéronautique, les nombres de Reynolds caractéristiques des tourbillons de sillage sont très grands. A l'heure actuelle aucun code DNS ne peut simuler la dynamique tourbillonnaire pour de tels nombres de Reynolds. Dans ce cas, la limitation sur les nombres d'ondes n'est plus justifiée.

Dans ce chapitre, nous allons donc nous intéresser à l'approximation asymptotique ($k \rightarrow \infty$) de l'instabilité elliptique pour des profils de vorticité et de jet continus. Le cas du profil de Rankine a déjà été décrit par Eloy [23] pour un tourbillon sans jet. Les résultats sont identiques par ajout d'un jet constant dans le cœur du tourbillon si $kW_0 \sim \mathcal{O}(1)$. Pour de tels profils, la valeur asymptotique du taux de croissance pour des modes principaux est $9/16\varepsilon$. Ce résultat est similaire à l'estimation obtenue par une approche locale [8].

Nous nous proposons d'étendre ce résultat au cas de profils de vorticité et de jet quelconques. Pour cela, une estimation des termes composant le taux de croissance (4.15) est à envisager. Pour simplifier l'étude, nous ne considérerons que le cas de couplage de modes de cœur neutres.

La structure des modes pour une telle approximation a déjà été décrite dans le chapitre précédent. Reste donc à évaluer les différents termes des matrices caractéristiques du taux de croissance. Dans un premier temps, identifions les différentes "familles" de la matrice \mathcal{N}   l'origine du terme de croissance de l'instabilité.

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2} (\mathcal{A} + \mathcal{C} + \mathcal{B}_\theta + \mathcal{B}_k + \mathcal{R}) .$$

avec

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -i \frac{f}{r} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & -i \frac{f}{r} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & -i \frac{f}{r} \frac{\partial}{\partial r} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{r} f' + i \frac{f}{r^2} & \frac{2f}{r^2} - \frac{f'}{r} & 0 \\ \frac{f''}{2} + \frac{f'}{2r} & \frac{i}{r} f' - i \frac{f}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_\theta = \begin{pmatrix} \frac{f'}{2r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f'}{2r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f'}{2r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_z = \begin{pmatrix} \frac{fW'}{2\Omega r} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{fW'}{2\Omega r} \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{fW'}{2\Omega r} \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{fW'}{2\Omega r} \right) & \frac{ifW'}{\Omega r^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Certaines de ces contributions ont un rôle dominant lorsque k est grand. On peut, par exemple, montrer que l'influence de la matrice \mathcal{R} est négligeable par rapport aux autres termes de \mathcal{N} . En effet, l'hypothèse $kW_0 \sim \mathcal{O}(1)$ implique $W_0 \sim \mathcal{O}(1/k)$. Le terme associé à la matrice \mathcal{R} est donc d'ordre $1/k$ alors que les autres termes sont, *a priori*, d'ordre un.

Nous allons, tout d'abord, brièvement rappeler la structure et l'ordre de grandeur de chaque variable d'un mode de cœur neutre déterminé par l'approximation WKB. Les termes d'amplitudes de vitesses et pression (u, v, w, p) peuvent être développés dans l'approximation WKB comme

$$\begin{aligned} p &\sim \frac{1}{k} \left(p^0 + \frac{p^1}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) e^{k\phi} \\ u &\sim \left(u^0 + \frac{u^1}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) e^{k\phi} \\ v &\sim \left(v^0 + \frac{v^1}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) e^{k\phi} \\ w &\sim \left(w^0 + \frac{w^1}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) e^{k\phi} \end{aligned}$$

Ces développements sont identiques à ceux mentionnés par Le Dizès & Lacaze [69] à un facteur k près. Ce développement permet de ramener l'énergie de chaque mode à l'ordre 1. Nous allons nous intéresser ici à la partie oscillante du mode proche du cœur. Cette solution s'écrit pour la pression

[69]

$$p^0 = \sqrt{\frac{-\gamma}{r}} (-\Delta)^{1/4} \cos \Phi , \quad (5.1)$$

avec $\Phi = k \int_0^r \sqrt{\frac{-\Delta}{\gamma^2}} - \frac{m}{2} \pi - \frac{\pi}{4}$. Φ représente ainsi la phase radiale d'un mode.

On peut de la même façon déterminer l'approximation asymptotique pour le problème adjoint. Le développement de chaque variable en puissance du nombre k est identique à celui du problème direct. La solution pour la pression du problème adjoint s'écrit

$$\bar{p}_a^0 = \sqrt{-\frac{1}{\gamma r}} (-\Delta)^{1/4} \cos \Phi . \quad (5.2)$$

La structure radiale de la pression ((5.1) & (5.2)) implique que chaque terme du taux de croissance va être une combinaison des fonctions *sinus* et *cosinus*. Ces combinaisons sont fondamentales pour le terme de croissance car elles déterminent la cohérence radiale des modes couplés.

5.1 Cas non symétrique.

Dans un premier temps nous allons mettre de côté le cas particulier : $W_0 = 0$, $(m_1, m_2) = (-1, 1)$ et $\omega = 0$.

Intéressons nous tout d'abord au terme d'énergie de chaque mode lié à la matrice \mathcal{J} . L'énergie \mathcal{J}_i d'un mode m_i peut s'écrire dans l'approximation WKB grand k :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_i &= \int_0^{r_t} (u^0 \bar{u}_a^0 \sin^2(\Phi_i) + v^0 \bar{v}_a^0 \sin^2(\Phi_i) + w^0 \bar{w}_a^0 \cos^2(\Phi_i)) r dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{r_t} (u^0 \bar{u}_a^0 + v^0 \bar{v}_a^0 + w^0 \bar{w}_a^0) r dr \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{r_t} (u^0 \bar{u}_a^0 + v^0 \bar{v}_a^0 - w^0 \bar{w}_a^0) \cos(2\Phi_i) r dr . \end{aligned}$$

Le premier terme de l'intégrale \mathcal{J}_i est d'ordre un. En revanche, le terme de phase rapide ($\cos(A(r)k)$) est d'ordre $\mathcal{O}(\frac{1}{k^\alpha})$ ($\alpha > 0$) comme nous le verrons par la suite. Ainsi, l'énergie de chaque mode est d'ordre un. Cette énergie s'écrit comme une intégrale sur toute la partie oscillante du mode. Le numérateur du taux de croissance (4.15) est une somme d'intégrales de terme de phase $\Phi_1 - \Phi_2$ et $\Phi_1 + \Phi_2$ qui correspondent au terme de couplage entre les deux modes. Ces phases varient rapidement sur le domaine d'intégration dès que les deux ondes ne sont pas en phase dans tout le cœur du tourbillon, ce qui est généralement le cas. On s'attend donc à ce que les contributions des différentes intégrales soient localisées soit au voisinage de point selle des différentes phases soit au bord du domaine d'intégration *i.e.* en $r = 0$. On se propose ici de regarder la contribution du centre du

tourbillon. Proche du centre, le terme de phase des modes de Kelvin peut être simplifié :

$$\Phi = k \left(\sqrt{\frac{-\Delta}{\gamma^2}} \right)_{r=0} r + \mathcal{O}(kr^3) - \frac{m}{2}\pi - \frac{\pi}{4}.$$

Les résultats présentés dans la suite découlent du principe suivant. Proche du cœur, tout couplage de modes à travers la matrice \mathcal{N} s'écrit comme une intégrale de puissance de r pondérée par une puissance du paramètre k . Ainsi, chaque contribution de la matrice "d'instabilité" peut se décomposer en intégrale du type

$$\mathcal{I} \sim k^n \int_0^\varepsilon (A_0 r^q + \mathcal{O}(r^{q+2})) e^{ikP_0 r + \mathcal{O}(kr^3)} dr,$$

avec n entier, q rationnel, $\varepsilon \ll 1$, A_0 et P_0 les premiers ordres des développements en $r = 0$ des termes d'amplitude et de phase respectivement.

Après changement de variables et en supposant que A_0 et P_0 sont non nuls, l'intégrale \mathcal{I} devient

$$\mathcal{I} \sim k^{n-q-1} \int_0^\infty A_0 \tilde{r}^q e^{ikP_0 \tilde{r}} d\tilde{r}$$

Cette intégrale peut s'écrire sous la forme de fonction Γ pondérée par une puissance de k . Ainsi l'ordre de grandeur de l'intégrale \mathcal{I} lorsque $k \gg 1$ est

$$\mathcal{I} \sim \mathcal{O}(k^{n-q-1}),$$

si $q \neq 0$.

Ainsi, après avoir développé chaque terme de la matrice \mathcal{N} sous la forme d'intégrales \mathcal{I} , on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\theta &\sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right), \\ \mathcal{B}_z &\sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right), \\ \mathcal{R} &\sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right), \end{aligned}$$

quelque soit la résonance. En revanche, l'ordre de grandeur des deux autres contributions varie selon le couplage de modes considérés. Ainsi, on peut distinguer le cas de deux modes en phase en $r = 0$, *i.e.* vérifiant la relation $\omega - kW_0 = (m_1 + m_2)/2$. Ces modes sont ceux que nous avons considérés dans la partie numérique (chapitre précédent). Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \sim \mathcal{O}(k^{-1}) \\ \mathcal{C} \sim \mathcal{O}(k^{-1}) \end{aligned} \quad \left| \quad \text{pour } \omega - kW_0 \neq \frac{m_1 + m_2}{2}, \right.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \sim \mathcal{O}(k^{-1/3}) \\ \mathcal{C} \sim \mathcal{O}(k^{-1/3}) \end{aligned} \quad \left| \quad \text{pour } \omega - kW_0 = \frac{m_1 + m_2}{2}. \right.$$

Il semble donc que l'instabilité elliptique est une contribution en $r = 0$ plus importante pour les modes "résonants" au centre ($\omega - kW_0 = (m_1 + m_2)/2$). En revanche, le taux de croissance maximum que l'on trouve pour cette approximation est d'ordre $k^{-1/3}$. Cela signifie que lorsque k est grand, les couplages sont peu instables. Cette tendance ne peut être vérifiée par la méthode numérique. En effet, pour les plus grandes valeurs de k que l'on ait pu calculer, il existe encore une cohérence radiale des modes (figure 5.1).

Une étude similaire pourrait être faite pour les contributions venant des

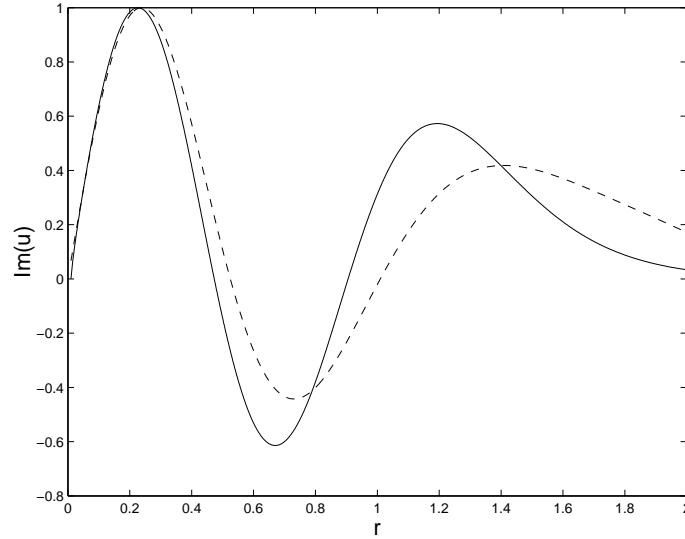


Figure 5.1: Structure radiale (vitesse radiale) des deux modes caractérisant le couplage $(-2, 0, 3)$ pour W_0 . Le nombre d'onde et la fréquence de ce couplage sont $k = 4.8$ et $\omega = -0.354 - 0.005i$. On obtient alors la condition en $r = 0$: $\mathcal{R}e(\omega) - kW_0 = 1.026 \sim 1$ (Cf. condition (4.11))

points selles des différentes phases. Elle conduit au même type de résultat. Une contribution en $k^{-\alpha}$ avec $\alpha > 1/3$ qui tend vers zéro pour des grands k .

Ainsi, pour un tourbillon de profil continu, le taux de croissance induit par la résonance de deux modes avec le champ d'étirement lorsque $k \rightarrow \infty$ tend vers zéro. Un tel résultat ne permet pas d'avoir une estimation du taux de croissance pour des valeurs de k modérées qui pourrait être comparée aux résultats numériques du chapitre 4. En revanche, nous avons constaté que le taux de croissance décroît moins vite pour des modes en phases en $r = 0$. Ce résultat semble, qualitativement être en accord avec les taux de croissance numériques importants calculés au chapitre 4.

5.2 Cas symétrique

Dans cette partie, nous nous intéresserons plus particulièrement au cas symétrique de résonance des deux modes $(m_1, m_2) = (-1, 1)$ tels que $W_0 = 0$ et $\omega = 0$. Dans ce cas, les phases des deux modes Φ_1 et Φ_2 sont identiques sur tout le domaine r . On peut ainsi développer les termes intégrales de la

contribution de la matrice \mathcal{N} de la même façon que l'énergie \mathcal{J}_i de chaque mode.

5.2.1 Terme d'instabilité.

On peut montrer comme dans la section précédente que l'influence de la matrice \mathcal{N} dans ce cas est dominée par les termes associés à \mathcal{A} et \mathcal{C} . Après simplifications, les parties dominantes de ces deux termes peuvent s'écrire

$$\mathcal{A} \sim \frac{i}{2} \int_0^{r_t} \frac{f}{r\gamma^2} \left(\frac{(-\Delta)^{-1/2}(\Delta' + 4\Omega'\omega_0 - \gamma\gamma')}{2} - \frac{\gamma'(-\Delta)^{1/2}}{\gamma} \right) dr$$

$$\mathcal{C} \sim \frac{i}{2} \int_0^{r_t} (-\Delta)^{-1/2} \left(\frac{\omega_0 f'}{\Omega r} + f'' + \frac{2f'}{r} - \frac{f}{r^2} \right) dr$$

Ces deux contributions sont d'ordre un. Les deux énergies étant également d'ordre un (de plus $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2$), le taux de croissance de l'instabilité s'écrit

$$\sigma = \frac{\mathcal{I}m(\mathcal{A} + \mathcal{C})}{2\mathcal{J}}. \quad (5.3)$$

On peut ainsi noter qu'un taux de croissance d'ordre un peut être obtenu pour deux modes parfaitement symétriques. Les deux points tournants associés à chacun de ces modes sont identiques et ainsi la condition d'oscillation en phase proche de $r = 0$ est satisfaite sur tout r . Si cette condition est presque vérifiée pour d'autres modes, on peut imaginer être aussi proche de cette tendance que de la tendance décrite dans le paragraphe précédent.

5.2.2 Gaussien.

Nous allons nous intéresser ici au cas du tourbillon de Lamb-Oseen qui correspond au profil Gaussien que nous avons étudié chapitre 4. Les résultats numériques des modes symétriques dans ce cas avaient été déterminés par Eloy [23]. Les valeurs du taux de croissance dans ce cas sont proches de la prédiction locale $9/16\varepsilon$. On avait abusivement penser que cet accord venait du fait que l'instabilité était gouverné par le centre. Il se trouve en fait que la valeur moyenne pour ce profil de tourbillon particulier est proche de celle du centre déterminée par méthode locale. En calculant les termes intégrales décrit précédemment pour un tel profil, on obtient

$$\sigma \sim 1.393.$$

Ce résultat est très proche des valeurs numériques (voir tableau 5.1).

Dans le tableau 5.1 sont donnés les valeurs numériques du taux de croissance de l'instabilité elliptique pour le tourbillon de Lamb-Oseen dans le cas de couplages de modes symétriques. On constate effectivement que σ/S_0 qui représente le taux de croissance adimensionné par le cisaillement au centre du tourbillon est très proche de la prédiction locale [8, 122]. Pourtant cette prédiction est une légère surestimation de taux de croissance. Nous obtenons, en effet, par méthode WKB une valeur de σ légèrement inférieure ($\sigma/S_0 = 0.552$).

i	1	2	3
k	2.26	3.96	5.26
σ	1.379	1.389	1.391
σ/S_0	0.546	0.55	0.551

Table 5.1: Taux de croissance de l'instabilité elliptique pour le tourbillon de Lamb-Oseen dans le cas de couplages de modes $(-1, 1)$ stationnaires. S_0 correspond à la valeur cisaillement au centre du tourbillon [24].

5.2.3 Modèle à deux rayons.

D'autres types de profils de vitesse continus peuvent être décrit par cette méthode pour le couplage de modes symétriques. En particulier, nous allons décrire dans cette partie le modèle du tourbillon à deux rayons. Cette loi est représentative du profil d'un tourbillon créé après enroulement de la nappe de vorticité dans le sillage d'un avion. Il a, en effet, été observé [43, 44, 20, 113] qu'un tel tourbillon est caractérisé par deux échelles de longueurs et qu'il diffère par conséquent du tourbillon de Lamb-Oseen. Ce phénomène est relié à l'enroulement de nappe tourbillonnaire. Le cœur du tourbillon est une rotation solide mais il existe entre le cœur et la zone extérieure potentielle, une zone dans laquelle la vitesse suit une loi de puissance du type $r^{-\alpha}$. Cette loi de vitesse est en accord avec le modèle de Betz [11] pour lequel $\alpha = 1/2$ avec une aile de forme elliptique. Fabre & Jacquin [29, 44] ont étendu ce modèle à un profil de vitesse continu. Ainsi, la vitesse angulaire d'un tel tourbillon s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\Omega = \frac{1}{(1 + (r/a_1)^4)^{(1+\alpha)/4} (1 + (r/a_2)^4)^{(1-\alpha)/4}} ,$$

où a_1 et a_2 sont les deux rayons caractéristiques du tourbillon. La vitesse azimutale $V(r)$ d'un tel profil est tracé sur la figure 5.2 pour $a_1 = 0.2$, $a_2 = 2$ et $\alpha = (0.3, 0.6)$.

Fabre & Jacquin [29] ont déterminé la réponse de ce tourbillon à un champ de déformation elliptique stationnaire. Ils ont constaté que la contribution dominante de l'instabilité elliptique pour ce tourbillon n'est pas toujours proche du centre. Dans ce cas, l'analyse locale au voisinage du centre [8, 121, 97] n'est plus adaptée au problème. La méthode développée ici permet d'obtenir une approximation du taux de croissance en tenant compte de la contribution de résonance sur tout r .

Les résultats sont présentés tableau (5.2). σ_i^{num} sont les résultats numériques obtenus par Fabre & Jacquin [29] pour les trois premières résonances symétriques lorsque k croît. σ est l'estimation asymptotique obtenue à l'aide de l'expression (5.3). On constate un bon accord entre les résultats numériques et la prédiction WKB grand k .

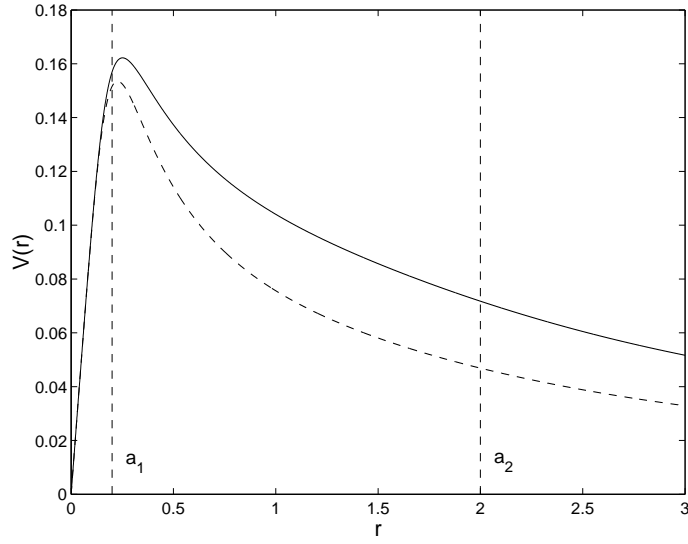


Figure 5.2: Profils du modèle de tourbillon à deux rayons. $a_2/a_1 = 10$: 'trait continu' : $\alpha = 0.3$, 'trait interrompu' : $\alpha = 0.6$.

α	$\sigma_{i=1}^{num}$	$\sigma_{i=2}^{num}$	$\sigma_{i=3}^{num}$	σ
0.6	1.8426	1.8619	1.8676	1.8698
0.5	1.8496	1.8701	1.8749	1.8742
0.4	1.6423	1.7000	1.7035	1.7023
0.25	1.6108	1.6194	1.6185	1.6175
0	1.5360	1.5485	1.5502	1.5496

Table 5.2: Comparaison du taux de croissance obtenu par approximation WKB σ avec les résultats numériques σ_i^{num} obtenus par Fabre & Jacquin [29] pour différentes valeurs de α et pour un rapport de rayon $a_2/a_1 = 10$. i correspond au label du couplage comme nous l'avons défini chapitre 4.

5.3 Discussion

La méthode développée dans ce chapitre peut être vue comme une méthode complémentaire à l'analyse locale. Dans ce cas, toutes les lignes de courant du tourbillon sont considérées pour tenir compte de la dépendance radiale de notre problème. Dans le cas du tourbillon de Rankine, l'analyse locale est une très bonne prédiction puisque les caractéristiques des lignes de courant de ce tourbillon dans le cœur sont identiques (rotation solide). On peut en effet montrer que pour un tel tourbillon, les couplages d'onde sont les mêmes sur chaque ligne de courant. L'analyse WKB devient alors équivalente à l'analyse locale. Pour des profils continus, ce résultat n'est plus vérifié.

Dans le cas général de profils continus, il n'existe pas, *a priori*, comme pour le tourbillon de Rankine, de couplages de deux modes en phases dans la direction radiale. On peut en revanche trouver des modes en phases proche du cœur qui développent pour des nombres d'ondes modérés une instabilité dont le taux de croissance est important. C'est par exemple le cas pour les couplages présentés figure 4.21 lorsque $\omega - kW_0 = (m_1 + m_2)/2$. Nous avons constaté que ces taux de croissance importants sont associés à une quasi-résonance dans la direction radiale. Cependant, pour des grands nombres d'ondes, une telle quasi-résonance ne peut se réaliser qu'au voisinage d'un rayon particulier, ce qui explique que dans cette limite, le taux de croissance doit tendre vers zéro. Il existe, en revanche, un cas très particulier correspondant à la résonance $(-1, 1)$ pour $W_0 = 0$ et $\omega = 0$. Ces deux modes sont, en effet, symétriques et donc en phase selon la direction radiale, ce qui induit des taux de croissance d'ordre un.

Cette analyse asymptotique semble donc fondamentale pour tenir compte des effets de volumes qui ne sont pas considérés dans l'analyse locale. On s'est, en effet, aperçu que les résultats qui en découlent sont différents.

6. CONCLUSION

Dans cette partie, nous avons étudié l'effet d'un jet axial sur l'instabilité elliptique d'un tourbillon. Une grande diversité de modes instables dépendante du paramètre de jet a pu être mise en évidence. En particulier, nous avons ainsi montré que la structure azimuthale du mode le plus instable dépend du paramètre de jet. Cette caractéristique est donc très différente du tourbillon sans jet pour lequel le mode le plus instable correspond à une déformation sinusoidale du cœur du tourbillon. Lorsqu'un jet est imposé, des structures plus complexes peuvent alors apparaître (modes d'ordre 2, 3 ou plus dans la direction azimuthale).

L'analyse pour des grands nombres d'ondes de l'instabilité elliptique a permis de mettre en évidence une tendance très particulière. Contrairement à ce que l'on pouvait penser, le taux de croissance tend vers zéro si les deux modes résonants ne sont pas en phase dans le cœur du tourbillon. Dans ce cas l'approche locale n'est plus valide (la résonance au centre n'est alors pas suffisante). En revanche, pour des nombres d'ondes d'ordre unité, les structures radiales des deux modes sont suffisamment proches pour donner un taux de croissance d'ordre un. Cette caractéristique pourrait être prise en compte pour un nouveau développement asymptotique. On peut, en effet, supposer deux modes résonants en phase dans le cœur sauf localement où une erreur sur la phase peut être ajoutée (par exemple en supposant que les points tournants associés à l'approximation WKB grand k des modes résonants sont très proches l'un de l'autre). Une telle étude donnerait une estimation sur le nombre d'onde critique en dessous duquel un taux de croissance non nul peut être obtenu.

Outre cet aspect asymptotique sur l'estimation des taux de croissance, deux autres perspectives semblent être à envisager : l'instabilité des tourbillons co-rotatifs et le développement non linéaire de l'instabilité elliptique.

6.1 L'instabilité de deux tourbillons co-rotatifs

La dynamique de deux tourbillons co-rotatifs sans jet axial a été étudiée dans de nombreux travaux d'un point de vue théorique, numérique et expérimental (voir par exemple la thèse de Meunier [86] et ses références). Il est connu que deux tourbillons co-rotatifs tournent l'un autour de l'autre avant de fusionner pour ne donner qu'un unique tourbillon. Pour certaines gammes de paramètres, les deux tourbillons peuvent développer une instabilité tridimensionnelle avant la fusion. Cette instabilité due au champ d'étirement induit par chaque tourbillon [87, 70] est comparable à l'instabilité elliptique présentée ici. Les résultats connus dans le cas de deux tourbillons de Lamb-

Oseen pourraient être étendus au cas de profils de Batchelor.

Dans le cas de deux tourbillons co-rotatifs, la rotation des tourbillons l'un autour de l'autre implique que le champ d'étirement induit par chaque tourbillon tourne à la fréquence de rotation Ω des deux tourbillons. Une analyse de deux tourbillons ponctuelles de circulations Γ_1 et Γ_2 permet d'écrire Ω comme fonction de ces deux circulations et de la distance b entre les deux tourbillons : $\Omega = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi b^2}$. Cette caractérisation implique une modification de la condition de résonance de deux modes avec le champ d'étirement (4.11) qui s'écrit dans ce cas :

$$\omega_2 = \omega_1 \pm \Omega, \quad m_2 = m_1 \pm 2 \quad k_2 = k_1.$$

Pour des petites valeurs de Ω , *i.e.* pour des valeurs de b grandes, la condition de résonance est très proche du cas de deux tourbillons contra-rotatifs. Les régions d'instabilité dans un plan (W_0, k) peuvent alors être très proches des régions déterminées dans le chapitre (4). Il est à noter, au regard de l'étude menée dans cette thèse, que plus Ω est grand plus les modes satisfaisants la condition de résonance parfaite proche du centre (4.12) seront atténués par la singularité de couche critique décrite dans le chapitre (4).

Une étude plus approfondie est à envisager, notamment pour la détermination du taux de croissance en utilisant la même approche que celle menée par Le Dizès & Laporte [70]. Une telle étude est fondamentale pour la compréhension de la dynamique du sillage proche d'un avion.

Il est à noter qu'une dynamique similaire est à envisager dans le cas de deux tourbillons contra-rotatifs et de circulations différentes.

6.2 Développement non linéaire de l'instabilité elliptique

Prochainement, une étude sur le développement non linéaire de l'instabilité elliptique va être développée grâce au code DNS présenté précédemment. Cette étude est indispensable pour la validation de l'instabilité elliptique dans des configurations réalistes. Les travaux existants sur le sujet se sont intéressés à la résonance $(m_1, m_2) = (-1, 1)$ qui est la configuration privilégiée dans le cas d'un tourbillon sans jet. Des études théoriques, numériques et expérimentales d'un cylindre déformé en rotation [48, 83, 27] ont mis en évidence une instabilité secondaire de l'écoulement. Dans ce cas, des transitions de l'écoulement vers la turbulence ont été observées [81, 27]. En revanche, pour un tourbillon de type Gaussien sans jet axial, le formalisme faiblement non linéaire développé par Sipp [111] semble privilégier une saturation puis une relaminarisation de l'écoulement. Cette dynamique a également été observée lors de simulation numérique de deux tourbillons sans jet axial contra-rotatifs [63].

Pour un tourbillon avec jet axial, des modes caractérisés par des structures spatiales plus complexes peuvent devenir les plus instables. Le scénario décrit dans le cas sans jet n'est alors plus valide. Dans ce cas, une étude faiblement non linéaire doit être menée pour déterminer si l'écoulement peut suivre une dynamique différente de celle du tourbillon sans jet due à la présence de modes caractérisés par des structures plus complexes.

Deuxième partie

INSTABILITÉ ELLIPTIQUE EN GÉOPHYSIQUE : L'EXEMPLE DES NOYAUX PLANÉTAIRES

7. INTRODUCTION

7.1 Le champ magnétique terrestre

La structure interne de notre planète et sa formation sont à l'heure actuelle et depuis plusieurs siècles sujettes à de nombreuses questions. Le mystère lié à la structure interne de la Terre réside principalement dans l'incapacité de l'observation directe. Les techniques modernes permettent, en effet, d'analyser des roches par le biais de forage jusqu'à une dizaine de kilomètres de profondeur. Vis à vis des grandeurs caractéristiques de notre planète, ces distances sont presque négligeables. En outre, notre planète est source d'un champ magnétique, à l'origine d'une enveloppe qui la protège des rayonnements solaires : la magnétosphère. Une meilleure connaissance de ce champ doit donc être initiée par une meilleure connaissance du centre de la Terre. Il existe, maintenant, différentes méthodes indirectes pour connaître certaines des caractéristiques de notre planète qui s'avère être extrêmement complexe. Nous nous proposons, tout d'abord, de faire un bref historique sur la découverte de ce champ magnétique.

7.1.1 Découverte de la structure interne de la Terre

L'utilisation de la première boussole est attribuée aux Chinois au cours du *II^e* siècle de notre ère. Son utilisation était principalement tournée vers des fins divinatoires et elle était constituée d'une cuillère aimantée posée sur une table en bronze. La direction désignée par la cuillère représentait, dans les croyances chinoises, la direction d'équilibre entre le Yin et le Yang et indiquait la direction d'alignement des palais. En revanche, la boussole est devenue moyen d'orientation pour les marins à partir du *VI^e* siècle et elle n'arriva en Europe par l'intermédiaire des Arabes qu'au cours du *XII^e* siècle.

La particularité que possède une aiguille aimantée à s'orienter vers le même point quelque soit sa position sur le globe terrestre a suscité l'intérêt de nombreux scientifiques. Après différentes hypothèses comme la présence de matériaux attracteurs aux pôles ou même de source extraterrestre, ce n'est finalement qu'au début du *XVII^e* siècle que William Gilbert [35] émit l'hypothèse que la Terre serait un gigantesque aimant. Il montra effectivement qu'une sphère uniformément aimantée (pierre de magnétite sphérique) produirait un champ magnétique dipolaire similaire à celui mis en évidence figure 7.1. Le modèle de ce principe, appelé "terrella", qui a mis en évidence cette thèse est présenté sur la figure 7.2. L'étude de Gilbert est souvent présentée comme la première étude de physique moderne s'intéressant aux rapports entre champs magnétique et électrique. A cette époque la structure

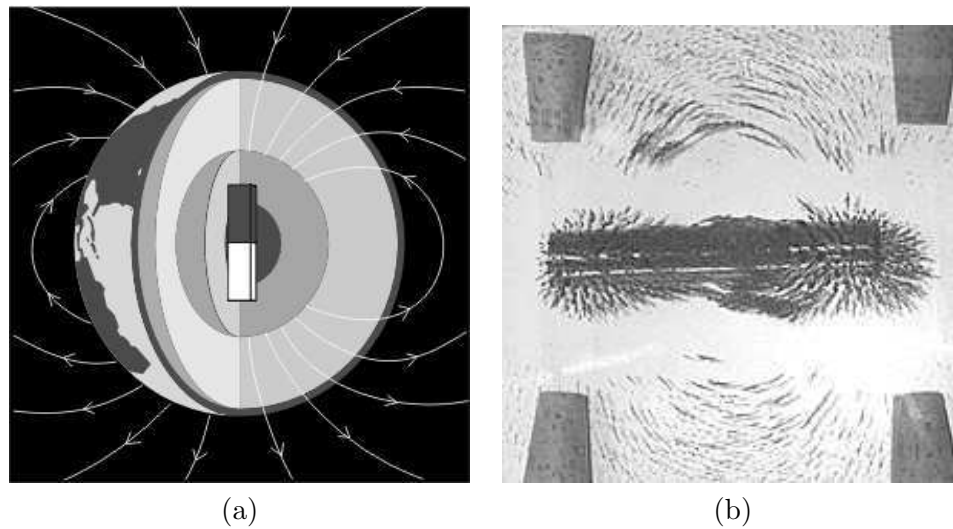


Figure 7.1: (a) Schématisation des lignes de champ magnétique de la Terre. (b) Mise en évidence du champ magnétique dipolaire d'un barreau aimanté grâce à de la limaille de fer.

interne de la Terre n'était pas connue. Pourtant, la conjecture proposée par Gilbert fut rapidement écartée. Il a, en effet, été remarqué une variation, lente et de très faible amplitude, de la position du pôle nord magnétique incompatible avec l'hypothèse proposée.

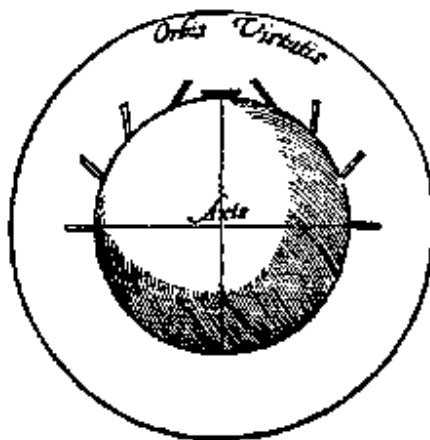


Figure 7.2: "terrella" : modèle du champ magnétique de la Terre d'après Gilbert [35] (pierre de magnétite)

La connaissance de la structure interne de la Terre et en particulier la présence d'un noyau liquide (figure 7.3) n'est que très récente (début du XX° siècle) et a permis une réelle progression dans la compréhension physique de l'origine du champ magnétique terrestre. Cette connaissance s'appuie en particulier sur l'analyse d'ondes sismiques. Ces ondes, générées à l'épicentre d'un tremblement de terre, peuvent être divisées en deux catégories : les ondes de volume et les ondes de surface. Les ondes de surface ne se propagent

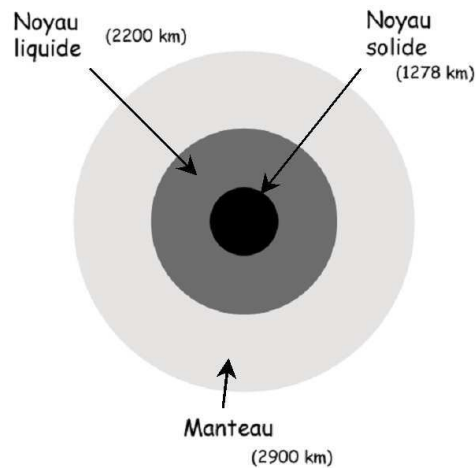


Figure 7.3: Schématisation de la structure interne de la Terre.

qu'à la surface de la planète. Les ondes de volume, quant à elles, sont soit une compression (ou dilatation) d'un volume élémentaire soit son cisaillement et peuvent se propager vers le centre de la planète. Les ondes de compression sont plus rapides et appelées ondes P (primaire) alors que les ondes de cisaillement plus lentes sont appelées ondes S (secondaire). C'est par l'étude de ces deux types d'onde P et S (en général leurs vitesses de propagation) lors de séisme que l'on est à présent capable de retracer les changements d'état de l'intérieur de notre planète. De telles études ont ainsi mis en évidence la présence d'un noyau liquide et conducteur au début du XX^o siècle et plus tard d'une graine solide comme présenté sur la figure 7.3. Il est admis depuis maintenant près d'un siècle que les mouvements fluides de ce noyau liquide et les courants électriques qu'ils induisent sont la source de création et de déstabilisation du champ magnétique : c'est le phénomène qui est appelé l'effet "dynamo".

7.1.2 Observations du champ magnétique.

Ce n'est qu'au milieu du siècle dernier que le paléomagnétisme, grâce à l'étude des roches, a permis d'avoir une meilleure connaissance qualitative de l'histoire du champ magnétique. En particulier, le refroidissement de lave, contenant des minéraux ferromagnétiques et provenant du magma, au niveau des dorsales océaniques permet de mettre en évidence la partie dipolaire du champ magnétique. Certaines observations ont également pu être faites en milieu atmosphérique (voir par exemple la figure 7.4).

Grâce aux développements technologiques des moyens d'observation (en particulier par satellite), des études plus quantitatives ont permis d'établir que le champ magnétique de notre planète est en effet à 90% un dipole en



Figure 7.4: Coulée de lave solidifiée à Hawaï.

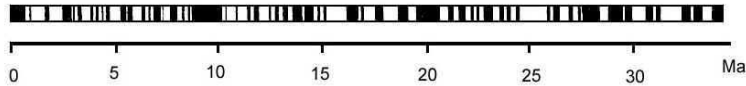


Figure 7.5: Schématisation des inversions du champ magnétique terrestre. bande blanche : champ "normal" (actuel), bande noire : champ inverse.

surface du globe alors que la faible partie restante est multipolaire. Cette dernière est bien plus présente au niveau du noyau liquide mais décroît plus rapidement avec la distance de la source que la partie dipole qui elle-même décroît comme l'inverse de la distance au cube.

Les observations des laves au niveau des dorsales ont également permis d'obtenir des informations sur le champ magnétique sur plusieurs millions d'années. Ces observations ont mis en évidence de nombreuses inversions (nord-sud) du champ magnétique au cours du temps (figure 7.5). On peut constater sur cette figure que les inversions ne sont pas périodiques et que les échelles de temps qui y sont associées sont de plusieurs centaines de milliers d'années. Cette intermittence du champ magnétique doit alors être liée à une dynamique particulière du noyau liquide qui serait donc lente par rapport à la vitesse de rotation de la Terre.

Outre, la dynamique du cœur liquide de la Terre, nous pouvons envisager également d'autres astres à cœur liquide. Par exemple, les analyses d'observations récentes des satellites Jovien, grâce à la sonde Galiléo, ont mis en évidence (depuis 1995) la présence de noyaux liquides et conducteurs pour certaines de ces planètes. Il semblerait, par exemple, que le cœur de fer liquide de Ganymède soit à l'origine d'un champ magnétique intense [55]. Il est, en revanche, difficile d'affirmer la présence de dynamo propre au satellite

Io, mais il existerait une déformation autour de cette planète des lignes de champ magnétique induites par le noyau de Jupiter [50]. Ce champ pourrait alors être interprété comme un champ magnétique induit [13, 94] du champ principal de Jupiter par la dynamique d'un fluide conducteur dans le noyau.

Du bref historique qui précède, un fait important est à souligner. Il existe un lien important entre le champ magnétique des planètes contenant un noyau de fluide conducteur et les mouvements fluides de ce noyau liquide. Ainsi, l'étude hydrodynamique du noyau liquide semble indispensable à la compréhension des variations du champ magnétique. On peut montrer que si un noyau liquide est en rotation solide stable, une échelle de temps sur laquelle le champ magnétique se dissipe est donnée par le temps de diffusion ohmique [31]

$$\tau_\eta = r_0^2 / \eta ,$$

où η est la diffusivité magnétique et r_0 le rayon du cœur liquide. Dans ce cas, le champ magnétique terrestre aurait dû disparaître en environ $4 \cdot 10^5$ ans après sa création. Pourtant, les observations montrent qu'il n'existe pas de décroissance évidente depuis plus de $3 \cdot 10^9$ ans. Il existerait donc une dynamique plus complexe associée au noyau liquide pouvant entretenir un champ magnétique intense. Dans ce cas, différents phénomènes pouvant déstabiliser l'écoulement de rotation solide sont à étudier. Dans le cas de la Terre, trois instabilités ont déjà été envisagées. Les deux plus courantes sont la convection et la précession. La troisième qui nous intéressera dans la suite de cet exposé est l'instabilité elliptique générée par les déformations de la Terre dues au champ de gravitation de la Lune principalement. Cette instabilité semble, dans le cadre des données de la Terre, proche du seuil d'instabilité. Cette même instabilité peut être envisagée pour les satellites Joviens qui par l'interaction de leur champ de gravitation et de celui de Jupiter peuvent être déformés sur plusieurs kilomètres contre quelques centimètres dans le cas de la Terre.

7.1.3 La convection : moteur de la dynamo ?

Dans le cas de notre planète, la composition chimique du noyau et les hautes températures au centre impliquent des variations de densité du centre vers le manteau qui induisent des mouvements de convection dans sa partie liquide et dont le moteur est la force de gravité centripète. Deux types de convection sont aujourd'hui retenues : la convection thermique et la convection solutale. Le premier type de convection est comparable à la convection thermique classique de type Rayleigh-Benard induite par un gradient de température entre le centre et le manteau. De plus, malgré les hautes températures, la graine solide est formée par solidification du fer liquide due aux très hautes pressions régnant à cette profondeur. Ainsi, le deuxième mouvement de convection peut être généré par la formation d'éléments légers en périphérie de la graine solide par cristallisation de la partie liquide. Ces éléments légers sont dirigés vers le manteau terrestre par la poussée d'Archimède. Ces deux types de convection sont ainsi dues à des gradients

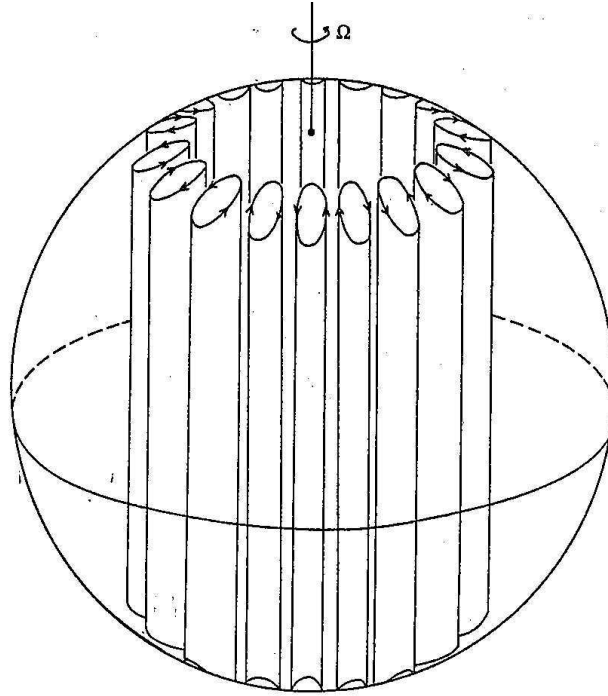


Figure 7.6: Colonnes de Busse [15] d'axes parallèles à l'axe de rotation de la Terre.

orientés dans la direction radiale du centre vers l'extérieur.

De nombreux travaux ont été menés sur le problème de convection dans une telle géométrie sphérique (voir, par exemple, les références [17, 105, 15, 45]). En particulier Busse [15] a déterminé la structure en rouleaux parallèles à l'axe de rotation (figure 7.6). Ces rouleaux peuvent être représentés par plusieurs paires de cyclones et anticyclones. Cette dynamique convective est présentée depuis plusieurs décennies comme un des moteurs indispensables à la dynamo terrestre. Pour une revue sur ce sujet, nous renvoyons le lecteur aux articles de Fearn [31] et Roberts & Glatzmaier [104]. Une illustration de l'influence de la convection sur le champ magnétique a été montrée par la célèbre simulation de Glatzmaier & Roberts [36] qui a mis en évidence la génération et une inversion de champ magnétique pour un tel écoulement. Il existe pourtant de nombreux problèmes liés à ce sujet qui ne sont pas encore résolus. Notamment, à cause des limitations numériques, la simulation de Glatzmaier & Roberts (et celles qui ont suivies) n'a pu être effectuée que pour des nombres caractéristiques du problème éloignés de plusieurs ordres de grandeur de ceux associés à la dynamique du noyau terrestre. L'instabilité à l'origine du forçage de l'écoulement du noyau liquide reste donc encore un problème ouvert. L'étude des différents phénomènes pouvant influencer la dynamique du noyau liquide semble alors pertinente.

7.2 Les ondes inertielles.

Il est connu que toute perturbation d'un écoulement en rotation dans une sphère peut être développée sur une famille d'ondes inertielles [39]. Ces ondes caractéristiques de l'écoulement peuvent être excitées par un forçage extérieur (par exemple une variation de la vitesse de rotation de la sphère [39]). Pour certains types de forçage, un couplage entre plusieurs ondes peut être envisagé entraînant des dynamiques complexes. La dynamique instable et l'inversion du champ magnétique étant certainement lié à une dynamique complexe du cœur liquide, l'étude des excitations d'ondes devient alors fondamentale. Aucune thèse à l'heure actuelle ne condamne l'influence des ondes inertielles sur la dynamique du champ magnétique même si elles ne semblent pas être le moteur de dynamo auto-induite dans le cas de la Terre [31]. Deux types de forçage qui pourraient être présents dans le noyau terrestre et à l'origine d'amplification d'ondes inertielles dans une sphère en rotation ont déjà été envisagées : la précession et les effets de marées.

7.2.1 La précession

L'axe de rotation \mathbf{k} de la Terre n'est pas fixe au cours du temps. Il tourne lui-même autour d'un axe virtuel $\mathbf{\Omega}$ et décrit ainsi un cône sur une période d'environ 26 000 ans (figure 7.7). Ce phénomène est dû à l'aplatissement de la Terre au niveau de ses pôles et à la non orthogonalité de l'axe de rotation de la Terre par rapport au plan de l'écliptique. La rotation rapide de la Terre induit une force centrifuge importante au niveau du noyau liquide qui déforme le manteau terrestre. Cette déformation se traduit par un bourrelet au niveau de l'équateur : la Terre est donc légèrement aplatie aux pôles (figure 7.7 (a)). L'attraction du Soleil au niveau de ce bourrelet équatorial induit un moment de torsion qui est à l'origine de la déviation de l'axe de rotation de la Terre. Ce mouvement appelé mouvement de précession est très lent par rapport à la vitesse de rotation de la Terre autour de ses pôles géographiques. Il peut donc être associé à une dynamique lente du noyau liquide. Ce phénomène est étudié depuis plus d'un siècle et on peut par exemple citer le célèbre article de Poincaré [98] où l'axe de rotation du fluide ω par rapport à l'axe de rotation \mathbf{k} de la sphère a été déterminé. De nombreux travaux ont suivi cette étude sur la précession (voir par exemple [116, 103, 14, 48, 91, 92, 93]). Kerswell [48], a notamment montré que la solution non visqueuse décrite par Poincaré [98] est instable. Cette instabilité est due à la non orthogonalité de l'axe de rotation du fluide ω avec les lignes de courant associées à l'écoulement dans une telle configuration (figure 7.7 (b)). Cette instabilité est du même type que l'instabilité elliptique pour un champ d'étirement d'ordre un dans la direction azimutale (Rappelons que dans le cas de l'instabilité elliptique, le champ d'étirement est d'ordre deux dans la direction azimutale (Cf. première partie)). Cette instabilité de type paramétrique peut être à l'origine d'excitation d'ondes inertielles.

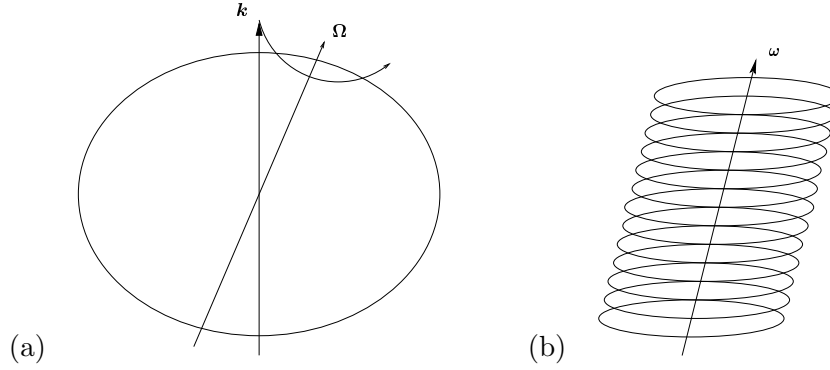


Figure 7.7: Phénomène de la précession. (a) : variation de l'axe de rotation k autour de l'axe de précession Ω . (b) : non orthogonalité de l'axe de rotation du fluide ω par rapport au lignes de courants induite par un écoulement dans la configuration (a).

7.2.2 L'instabilité elliptique

Notre planète subit de la part des champs de gravitation de la Lune et du Soleil, des effets de marées qui peuvent déformer le manteau [46] jusqu'à plusieurs dizaines de centimètres. La répercussion de ces effets au niveau du noyau liquide est certainement de déformer les lignes de courant de l'écoulement fluide. Nous pouvons de plus noter que Ganymède et Io semble, d'après les données actuelles, être de très bons exemples de ce type de déformation. Dans le champ de gravitation des autres satellites Jovien, leurs surfaces peuvent se déformer jusqu'à plusieurs kilomètres.

Dans la suite, nous allons considérer un problème modèle pour cette déformation qui permettra une étude à la fois expérimentale et théorique. Pour cela, nous nous proposons d'étudier l'écoulement d'un fluide dans une sphère en rotation faiblement déformée par un champ d'étirement bidimensionnel, stationnaire et perpendiculaire à l'axe de rotation de la sphère. La géométrie d'un tel écoulement est représentée schématiquement sur la figure 7.8. La figure 7.8 (a) montre la déformation tridimensionnelle d'une sphère induite par un champ de contrainte bidimensionnel. Les plans méridiens sont des ellipses ayant une excentricité qui varie selon le plan considéré. Une telle géométrie n'a pas de symétrie de révolution, ce qui rend sa visualisation difficile. L'équation de la surface est celle d'un ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + z^2 = 1$$

où les longueurs sont adimensionnées par le rayon R de la sphère hors champ de contrainte (*i.e.* $R^2 = ab$). La figure 7.8 (b) représente une vue de la déformation dans un plan horizontal de déformation. Le plan considéré est le plan équatorial défini par $z = 0$. Ce schéma serait équivalent pour tout $z \in [-1, 1]$ mais tel que $R_H(z) = \sqrt{1 - z^2}$ avec $R_H(z)$ le rayon horizontal de la sphère non déformée à une altitude z .

L'étude de stabilité d'un tel écoulement a déjà été envisagée dans différents travaux [52, 3]. En particulier Kerswell [52] a étudié de façon théorique la

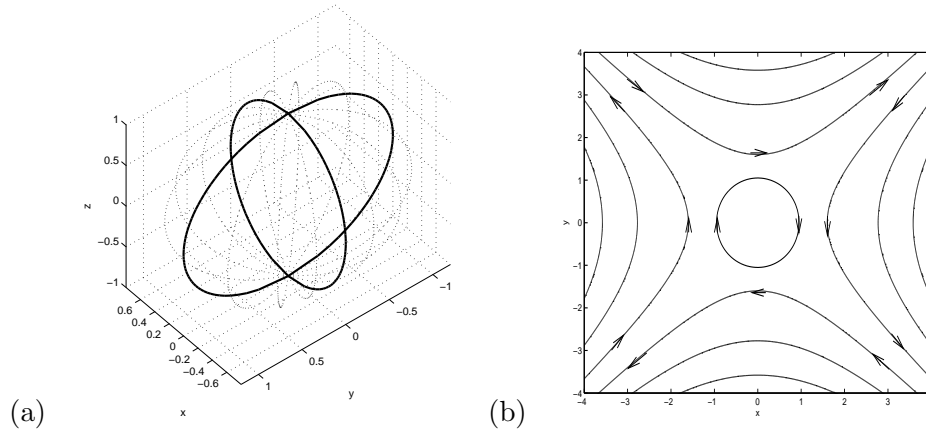


Figure 7.8: Déformation d'une sphère par un champ d'étirement bidimensionnel. (a) : surface de l'ellipsoïde. (b) : lignes de courant du champ d'étirement superposé à la rotation du fluide.

dynamique linéaire de ce type d'écoulement en tenant compte des effets induits par un champ magnétique imposé. Aldridge *et al.* ont mis en place un dispositif expérimental permettant de modéliser l'instabilité elliptique. Dans ce cas, un noyau déformable est placé au centre de la sphère. L'étude que nous allons développer dans la suite a été motivée par la lecture de ces deux articles mais aussi par l'article de Malkus [82] sur le problème de la précession. Dans cet article, l'effet de la précession est décrit comme une explication possible de la géodynamo. L'argument est basé sur l'idée d'associer les temps longs d'inversion du champ magnétique à la dynamique lente représentative de la précession. L'analyse de l'instabilité elliptique devient, dans cette optique, une étude également fondamentale.

Dans cette partie, nous nous fixons comme objectif de caractériser d'un point de vue expérimental et théorique l'écoulement d'un fluide soumis à l'instabilité elliptique dans une sphère en rotation. L'analogie entre cette instabilité et la dynamique d'un ellipsoïde solide en rotation sera soulignée. Ensuite, l'effet d'un noyau solide au centre sera décrit.

8. INSTABILITÉ ELLIPTIQUE DANS UNE SPHÈRE EN ROTATION

Dans ce chapitre nous présentons un article paru dans le Journal of Fluid Mechanics en 2004 : Lacaze L., Le Gal P. and Le Dizès S., "Elliptical instability in a rotating Spheroid", vol. 505, p. 1-22. [58]

Abstract

This paper concerns the elliptical instability of a flow in a rotating deformed sphere. The aim of our work is to experimentally analyse the characteristics of this instability and to provide a theoretical model which accounts for the observations. For this purpose, an elastic and transparent hollow sphere has been moulded in a silicone gel block. The flow is visualised using Kalliroscope flakes illuminated with a laser sheet as the sphere is set into rotation and compressed by two rollers. The elliptical instability occurs by the appearance of the so-called 'spin-over' mode whose growth rate and saturation amplitude are measured by video image analysis at different Ekman numbers. Growth rates are well predicted by the linear stability analysis. A nonlinear model is developed and is shown to correctly describe the saturated regimes observed in the experiments. At low Ekman numbers, a secondary instability leading to an intermittent regime is also discovered.

8.1 Introduction

Our study is devoted to the appearance of the elliptical instability of a fluid flow contained in a rotating sphere. The elliptical instability is now a classical three-dimensional instability of fluid dynamics. It is known to affect and even to destroy vortical flows. As described in the recent review of Kerswell [49], the instability mechanism lies on a resonance phenomenon between inertial (Kelvin) waves and external strain fields [8, 122]. Therefore, characteristics of this instability could explain the three-dimensional undulations of strained vortices [125, 90, 97] observed in turbulence [16], in wakes [78], in vortex pairs [77, 88], or in rotating elliptical cylinder [38, 81, 26]. Another major interest of the elliptical instability, or its sister instability induced by precession [92], concerns the dynamics of the flows contained in rotating ellipsoids which are laboratory models of astrophysical objects subjected to tidal distortions induced by close gravitational bodies [117, 82, 37, 52]. More specifically, the occurrence of this instability in the motion of the molten iron

cores of planets, such as the Earth, would be of prime importance in the understanding of the generation and of the dynamics of the magnetic fields of planets [52, 50]. With this aim, Aldridge *et al.* [3] have performed computations and built a rotating deformable shell where they observed some indications of the presence of the elliptical instability. In both cases (elliptical or precessional instability), one expects Kelvin waves to be excited. Note that, the dynamics of the Kelvin waves in this peculiar geometry (compared to the cylindrical or the spherical one) deserves by itself its own mathematical treatment [102]. Using the technique invented by Malkus [81], and more recently used and extended to triangular distortions by Eloy *et al.* [27], we have been able to apply an elliptical constraint to a deformable rotating sphere. The hollow sphere is moulded in a cylindrical block of transparent silicone gel. The cylinder is then placed in the device used by Eloy *et al.* [26]. It is set into rotation versus its axis while it is gently compressed by two rollers positioned parallel to the rotation axis. A video camera records the motions of water seeded by kalliroscope particles and illuminated by a laser sheet. The characteristics of the flow patterns are then measured by video image analysis and finally compared to the analytical results.

To our knowledge, this study presents for the first time, visualisations and measurements of the spin-over mode of the elliptic instability in a rotating sphere. The article is organised as follows. In a first part, we will recall and develop for some of its aspects, the mathematical description of the instability. Its linear and nonlinear analyses in a spherical geometry are presented in Section 2. Then in Section 3, experimental techniques and video image analysis are described and their results finally compared to our theoretical predictions.

8.2 Stability analysis of the flow

8.2.1 Inertial waves in a sphere

In this section, the main characteristics of the linear normal modes of the flow in a rotating sphere are recalled. Let us consider a sphere of radius R centred at the origin, rotating around a given axis (Oz) at the angular velocity Ω . In cylindrical coordinates, the basic flow velocity is given by $\mathbf{U} = r\Omega\mathbf{e}_\theta$ where r is the distance to the rotation axis and \mathbf{e}_θ the azimuthal unit vector. In the following, R and Ω will be used to normalise all spatial and time variables.

Let us perturb the velocity and pressure fields by a linear normal mode of azimuthal wavenumber m and frequency ω :

$$(\mathbf{u}', p') = (\mathbf{u}, p)e^{i(m\theta - \omega t)}.$$

In the non-viscous framework, the amplitude p of the perturbation pressure field is known to satisfy the so-called Poincaré equation (see for instance [39])

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} p - \left(\frac{4}{\gamma^2} - 1 \right) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0, \quad (8.1)$$

with the following non-viscous boundary conditions

$$r \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{2m}{\gamma} p - \left(\frac{4}{\gamma^2} - 1 \right) z \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \text{at} \quad r^2 + z^2 = 1, \quad (8.2)$$

where $\gamma = \omega - m$ is the frequency of the perturbation in the rotating frame. The solutions of this eigenvalue problem were given by Greenspan [39]. The viscous boundary layer correction of these inviscid solutions is known to be singular at the critical latitude defined by $\gamma = -2\mathbf{n} \cdot \mathbf{z}$ where \mathbf{n} is the sphere normal vector. In fact, this critical latitude generates a boundary layer eruptions in the main flow giving birth to shear layers in the core of the flow [40]. It appears that for each m , there is a discrete number of eigenvalue families which are defined as the roots of the equation :

$$(1 - x^2) \frac{d(P_l^{|m|}(x))}{dx} + m P_l^{|m|}(x) = 0; \quad x = \frac{\gamma}{2}, \quad (8.3)$$

where P_l^m is the Legendre polynomial of degree l and order m . These families are parametrised by the integers l and m . For each l and each m there are $l - m$ eigenvalues if $m \neq 0$ and $l - 1$ eigenvalues if $m = 0$. The eigenfunction associated with each eigenvalue γ is then given by the following expression :

$$p(r, z) = r^{|m|} z^e \prod_{j=1}^N \left(\xi_j^2 (\xi_j^2 - 1) + \xi_j^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{4} \right) r^2 + \frac{\gamma^2}{4} (1 - \xi_j^2) z^2 \right), \quad (8.4)$$

where $e = 0$ if $(l - m)$ is even, and $e = 1$ if $(l - m)$ is odd. The ξ_j , $j = 1..N$ are the zeroes of P_l^m and the integer N is given by :

$$N = \frac{1}{2}(l - |m|) \quad \text{when} \quad l - |m| \quad \text{is even,}$$

$$N = \frac{1}{2}(l - |m| - 1) \quad \text{when} \quad l - |m| \quad \text{is odd.}$$

From these conditions, it appears that the frequencies ω are confined in the interval $m - 2 < \omega < m + 2$. Moreover, for $m = 0$, the frequency spectrum is symmetrical with respect to $\omega = m$. Note that this symmetry tends to be also recovered for large values of m .

The different examples displayed in Figure 8.1 show the evolution of the frequency ω of the normal mode (Kelvin waves) as a function of the parameter l and for different azimuthal wavenumber m . These graphs resemble a discrete version of the dispersion relation of the non viscous modes calculated in a rotating cylinder where l is replaced by the axial wavenumber of the mode (see for instance Eloy00a). An equivalent spatial wavenumber can be defined here as $l - m$. In particular, the larger is $l - m$, the more complex is the spatial structure of the eigenmode.

When viscous effects are taken into account, the normal modes are damped. A priori, two sources of damping have to be considered : the volume viscous damping ν_V which is proportional to the Ekman number $E = \frac{\nu}{\Omega R^2}$ and the surface viscous damping ν_S proportional to \sqrt{E} which is induced by the boundary layers and the internal singular shear layers. Generally,

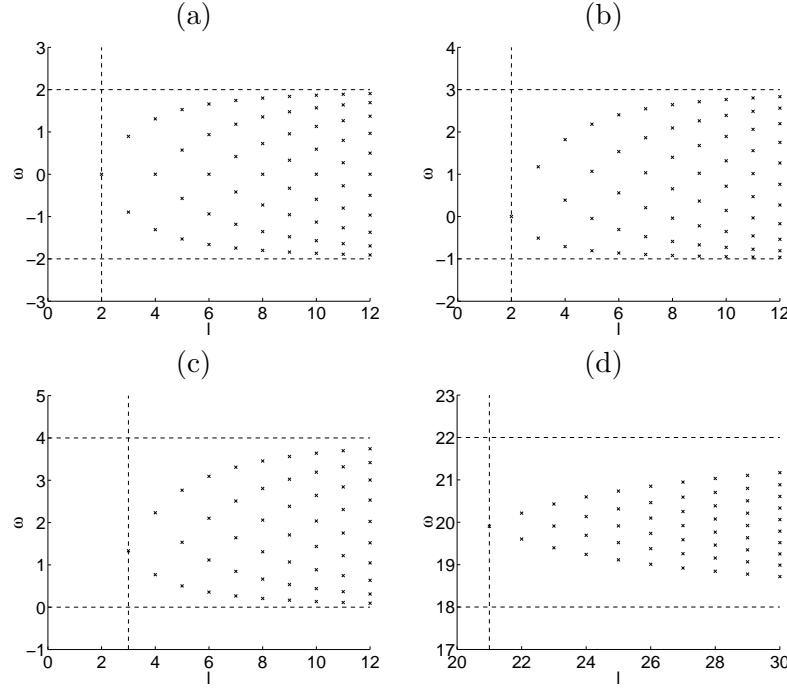


Figure 8.1: Eigenfrequencies versus l for $m = 0$ (a), $m = 1$ (b), $m = 2$ (c), $m = 20$ (d).

volume effects become large when the radial wavenumber increases, but in the special case of the sphere, volume viscous damping exactly vanishes for any inertial mode (see [126]). This implies that for the present flow, viscous damping can only be due to surface effects, that is internal shear layers and boundary layers. The viscous damping associated with internal shear layers is difficult to calculate. It is expected to be small compared to the contribution from boundary layers for the unstable modes we shall consider (see [40]). It will not be considered in the present study.

8.2.2 Elliptical instability

Linear stability theory

Consider now that the sphere is slightly elliptically deformed such that the radial and azimuthal components of the basic velocity field become :

$$\begin{cases} U = \varepsilon r \sin(2\theta), \\ V = r + \varepsilon r \cos(2\theta). \end{cases}$$

Here, it is implicitly assumed that the small strain rate ε induced by the sphere deformation is uniform in the whole flow. This small strain field added on the rotating flow is the source of the elliptical instability. As explained by many authors (see [49] for a review), the basic mechanism is the resonant coupling of two eigenmodes of the underlying rotating flow with the strain field. The condition of perfect resonance corresponds to the existence of two normal modes of identical frequency and azimuthal wavenumbers m

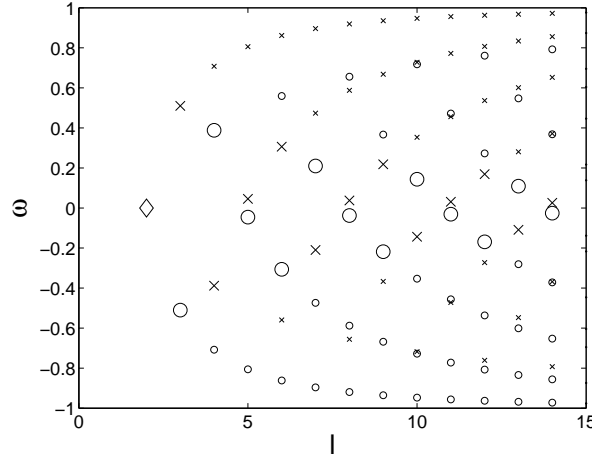


Figure 8.2: Eigenfrequencies for $m = 1$ and $m = -1$ (\circ and \times respectively). Large symbols represent principal configurations of quasi-resonant modes. The spin-over mode indicated by \diamond corresponds to a perfect resonance.

and $m + 2$. For a Rankine vortex, Eloy & Le Dizès [25] showed that this condition of resonance always leads to instability. However, they also demonstrated that the instability growth rate was strongly dependent on the spatial coherence of the resonant modes. In particular, they showed that principal resonant configurations, associated with the crossing of branches of the dispersion relation with the same label, provided an instable growth rate two orders of magnitude larger than the others. In a sphere, as mentioned above, continuous branches become points. This implies that perfect resonance is exceptional. In order to provide instability conditions for small but finite strain field it is therefore necessary to also consider imperfect resonance. This means that we allow a small frequency detuning $\delta\omega$ between two “resonant” modes. Based on the results for the Rankine vortex, we shall also focus on principal configurations, that is couples of modes m and $m + 2$ with the same l and same root label in equation (8.3). This hypothesis is also justified by Kerswell [51] who showed that no instability is possible if the two modes do not have the same l .

Figure 8.2 displays the frequencies of the modes for $m = 1$ and $m = -1$ (\circ and \times respectively). Note that there exists only one single perfect resonant configuration (\diamond). This perfect resonance is associated with a particular symmetry $m \rightarrow -m$ and occurs for $l = 2$. No similar perfect resonance is obtained for other couples of azimuthal wavenumber $(m, m + 2)$. The large characters in figure 8.2 indicate the principal configurations as l varies (a large \circ and a large \times for each configuration). Note that the frequency detuning between the two modes of these principal configurations is important for small l (except for $l = 2$) but it decreases and tends to zero as l increases. The stabilising effect of the frequency detuning is therefore expected to go to zero for large l . A viscous surface damping of order $O(\sqrt{E})$ is however expected to be always present in this limit. The largest non-viscous growth rate associated with a perfect resonance is of order ε . Detuning and viscosity

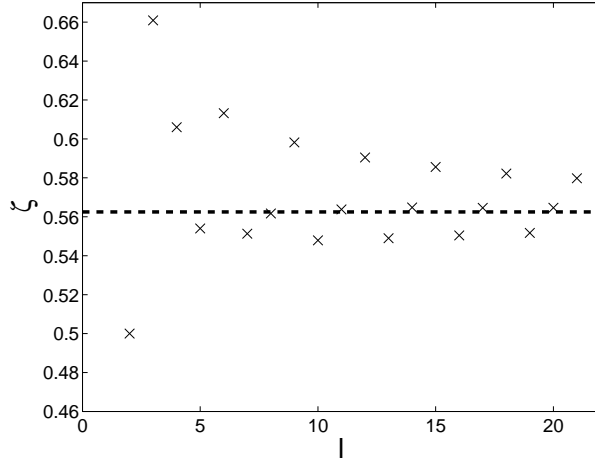


Figure 8.3: Coupling coefficient ζ for the principal configurations shown on figure 8.2 : $(m_1, m_2) = (-1, 1)$

could therefore overcome the instability when $\delta\omega \geq O(\varepsilon)$ and $E \geq O(\varepsilon^2)$. If a perturbation analysis is done for small ε using these scalings, the leading order growth rate including detuning and viscous effects can be obtained. Such an analysis has been performed for various configurations (see [120] or [25] for a Rankine vortex and [52] for a rotating spheroid). The final result is an equation for the growth rate $\sigma = \sigma_1\varepsilon$ of two coupled resonant normal modes :

$$\left(\sigma_1 + \frac{i\delta\omega}{\varepsilon} - \frac{i\sqrt{E}}{2\varepsilon}(\delta\omega_s^1 - \delta\omega_s^2) - \frac{\sqrt{E}\nu_s^1}{\varepsilon} \right) \times \left(\sigma_1 - \frac{i\delta\omega}{\varepsilon} + \frac{i\sqrt{E}}{2\varepsilon}(\delta\omega_s^1 - \delta\omega_s^2) - \frac{\sqrt{E}\nu_s^2}{\varepsilon} \right) = \zeta^2. \quad (8.5)$$

In this equation, $\delta\omega_s^1$ and ν_s^1 (resp. $\delta\omega_s^2$ and ν_s^2) are frequency and damping rate corrections induced by surface viscous effects on the first mode (respectively on the second mode). The coefficient ζ is the "coupling term" which generates the instability. It provides the maximum growth rate of the instability if both detuning and viscous damping are negligible. In figures 8.3 and 8.4, the coefficient ζ is plotted for several quasi-resonant configurations as a function of the label l . In figure 8.3, only the principal configurations $(-1, 1)$ shown on figure 2 are considered. In figure 8.4, the coupling term is computed for principal configurations of different azimuthal wavenumbers but only configurations satisfying $\delta\omega \leq 0.1$ are kept. On both figures, the dashed line indicates the value $\frac{9}{16}$ obtained for the growth rate of the instability for inviscid and unbounded flows [122]. Figure 8.3 demonstrates that ζ can be well above $9/16$. This however concerns only the strongly detuned configurations ($l = 3, 4$ and 6). For weakly detuned configurations (figure 8.4) the largest value of ζ is close to $9/16$. Figure 8.4 also shows that for a fixed l , the largest value of ζ is always reached for a configuration $(-1, 1)$. This anticipates the predominance of $(-1, 1)$ modes that will be observed below.

For the perfectly resonant configuration between modes $m = 1$ and $m =$

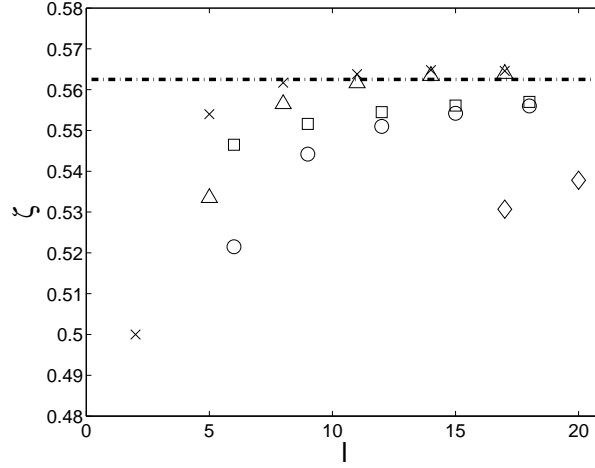


Figure 8.4: Coupling coefficient ζ for principal configurations satisfying $\delta\omega \leq 0.1$. \times : $(m_1, m_2) = (-1, 1)$, \square : $(m_1, m_2) = (0, 2)$, \triangle : $(m_1, m_2) = (1, 3)$, \circ : $(m_1, m_2) = (2, 4)$ and \diamond : $(m_1, m_2) = (8, 10)$.

-1 , pointed out on figure 8.2 at $l = 2$, the non-viscous growth rate can be calculated analytically : $\sigma_1 = \frac{1}{2}$ (\times for $l = 2$ in figures 8.3 and 8.4). This configuration is stationary and corresponds to a solid body rotation around an axis perpendicular to the main rotation axis (Oz). It is called the spin-over mode. It plays a particular role, as shown below.

As soon as $\delta\omega$ is non-zero, the non viscous growth rate $\frac{\sigma_{NV}}{\varepsilon}$ depends on the strain rate ε [see equation(8.5)] :

$$\frac{\sigma_{NV}}{\varepsilon} = \sqrt{\zeta^2 - \frac{\delta\omega^2}{\varepsilon^2}}.$$

The non viscous growth rate however remains always smaller than the "coupling term" ζ because of detuning. Figure 8.5 shows the evolution of the non viscous growth rate of the most unstable principal configurations $(-1, 1)$ for the two values of ε that will be used later in the experiment. Note that the detuning effect is clearly visible for the smallest value of ε ($\varepsilon = 0.08$). For this value, one needs $l \geq 17$ to get another $(-1, 1)$ configuration more unstable than the spin-over mode (first mode $l = 2$). If one considers other types of principal configurations $[(m_1, m_2) \neq (-1, 1)]$, one has to go to even higher values of l , because the non-viscous growth rate of such configurations is smaller as expected from the values of ζ (fig. 8.4) and larger values of the detuning.

Surface viscous effects damp the normal modes but also change their frequency. Concerning the elliptical instability, the frequency change can be destabilising if it tends to decrease the detuning of two quasi-resonant modes. This has been observed for a few configurations. However it has always been found to be smaller than the damping part.

On figure 8.6, the viscous growth rate of the most unstable principal configurations $(-1, 1)$ are plotted for different Ekman numbers and two values of ε . Only the surface contribution due to the boundary layers is com-

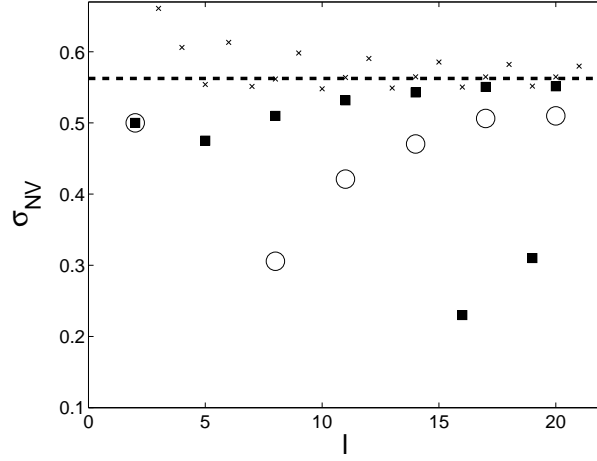


Figure 8.5: Non-viscous growth rate of the principal configurations $(m_1, m_2) = (-1, 1)$. $\varepsilon = 0.08$ (\circ), $\varepsilon = 0.16$ (\blacksquare). The coupling coefficient ζ is reported from figure 8.3 (\times)

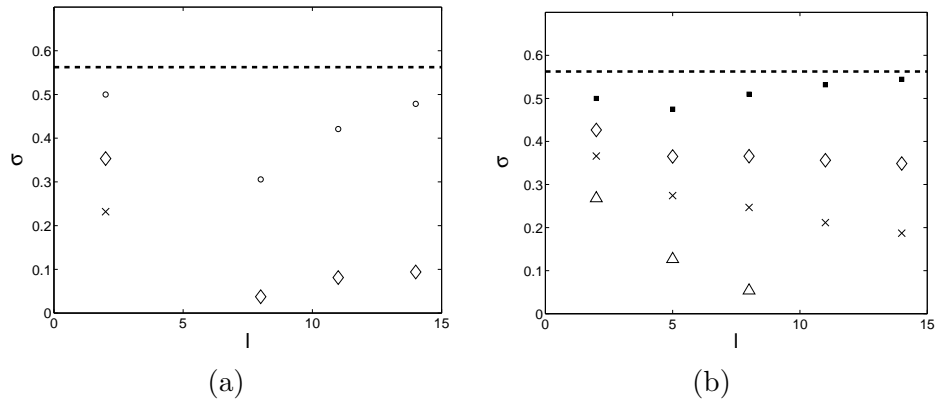


Figure 8.6: Viscous growth rates for the principal configurations $(-1, 1)$ for $\varepsilon = 0.08$ (a) and $\varepsilon = 0.16$ (b). (\circ , \triangle) : $E = 0$. \triangle : $E = 2 \cdot 10^{-4}$, \times : $E = 6.5 \cdot 10^{-5}$, \diamond : $E = 5 \cdot 10^{-5}$

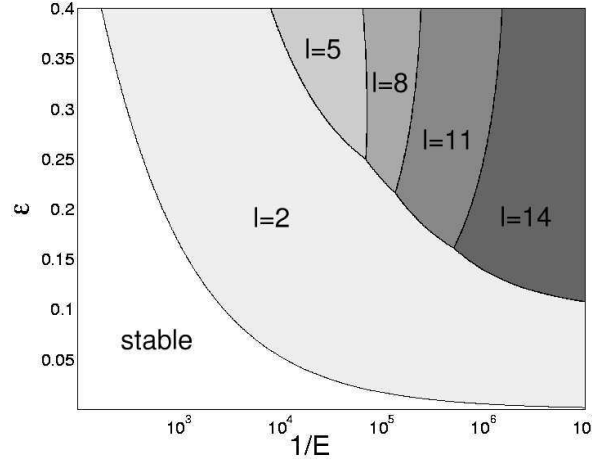


Figure 8.7: Most unstable mode as a function of E and ε . All the most unstable modes are principal configurations with azimuthal wavenumbers $(-1, 1)$. Only the value of l changes, as indicated. The spin-over mode corresponds to $l = 2$.

puted. As already mentioned above, the part coming from internal shear layers is not considered. Hollerbach & Kerswell [40] demonstrated that this contribution is negligible for the spin-over mode. We assume here that it is also the case for the other modes. Figure 8.6 shows that the spin-over mode is the most unstable configuration $(-1, 1)$ in both cases $\varepsilon = 0.08$ and $\varepsilon = 0.16$ for all Ekman numbers $E \geq 5 \cdot 10^{-5}$. The importance of this mode for large Ekman numbers is also visible on figure 8.7 on which are reported the characteristics of the most unstable configuration in the (ε, E^{-1}) plane. This figure demonstrates that the spin-over mode is the first mode to be destabilised as either ε or $1/E$ is increased. However, as already noticed above, the spin-over mode is not always the most unstable mode. For a fixed deformation ε (not too small), the characteristics of the most unstable mode change as $1/E$ increases. The most unstable mode remains a principal configuration $(-1, 1)$, but its spatial structure becomes more and more complex because l increases. An illustration of such a complex mode is provided on figure 8.8. Note also that for the Ekman numbers considered in figure 8.7, the spin-over mode is always the first mode to be destabilized as ε increases. However, this may not be the case for very small Ekman numbers, as those encountered in astrophysical situations. An asymptotical study in the limit of small Ekman numbers could be useful to solve this issue.

For the parameters of the experiments described in section 8.3, the spin-over mode is always the most unstable configuration. Its growth rate, calculated from equation(8.5), is

$$\sigma = \varepsilon \sqrt{0.5^2 - (0.259)^2 \frac{E}{\varepsilon^2}} - 2.62\sqrt{E}. \quad (8.6)$$

If we do not consider the boundary layer flow, the spatial structure of the spin-over mode is particularly simple as it is a solid body rotation around an axis in a plane perpendicular to the (Oz) axis. It is convenient to define

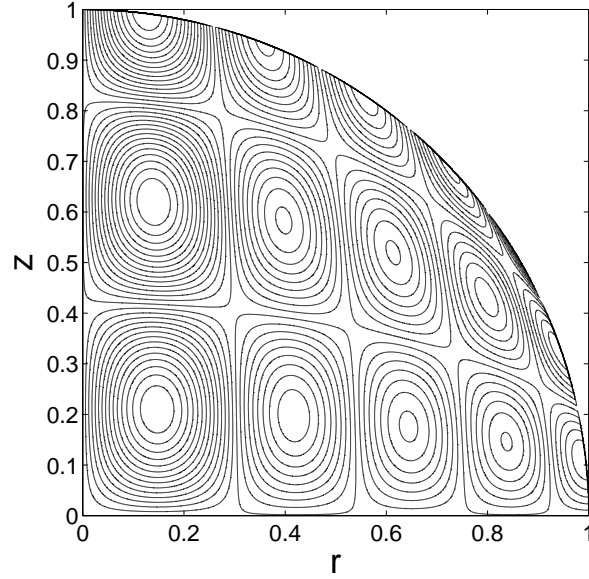


Figure 8.8: Illustration of the complex spatial structure of some most unstable modes. The (first) principal configuration $(-1, 1)$ for $l = 14$. Here are displayed the isocontours of the pressure amplitude in the transverse (r, z) plane.

the orientation angle ϕ of this axis in that plane. This permits to write the velocity and vorticity fields of this flow as

$$\mathbf{u} = A(t) \begin{vmatrix} z \sin(\phi) \\ z \cos(\phi) \\ r \sin(\phi) \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ 0 \end{vmatrix} = A(t) \begin{vmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{vmatrix} \quad (8.7)$$

where $A(t)$ is the amplitude of the spin-over mode. In the linear regime $A(t)$ evolves as $e^{\sigma t}$ with $\sigma \sim \frac{1}{2}\varepsilon$ and ϕ remains constant. This behaviour is modified by nonlinearity as presented in the next section.

8.2.3 Nonlinear evolution of the spin-over mode

The simple form of the spin-over mode permits the construction of a nonlinear model. Hough [41] and Poincaré [98] were the first to our knowledge to give the fully nonlinear system of equations describing non-viscous solid body rotation in a spheroid. More recently, Gledzer & Ponomarev [37] and Biello *et al.* [12], continued this study whose, with our notations, reduces to :

$$\begin{aligned} (2 - \varepsilon)\dot{\Omega}_1 &= -\varepsilon(1 + \Omega_3)\Omega_2, \\ (2 + \varepsilon)\dot{\Omega}_2 &= -\varepsilon(1 + \Omega_3)\Omega_1, \\ \dot{\Omega}_3 &= \varepsilon\Omega_1\Omega_2, \end{aligned} \quad (8.8)$$

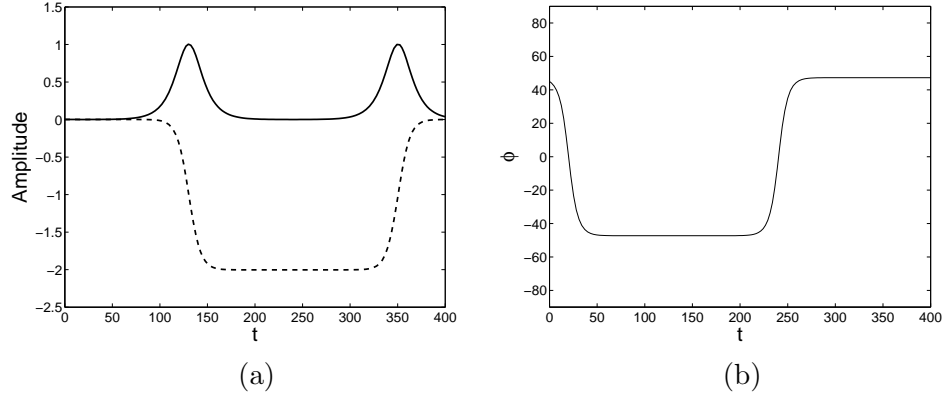


Figure 8.9: Nonlinear inviscid evolution of the spin-over mode. (a) : solid line : amplitude A of the spin-over mode; dashed line : nonlinear correction Ω_3 . (b) : phase ϕ of the spin-over mode

where $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ are the rotation intensity around major, minor and \mathbf{z} axes. The rotation velocities Ω_1 and Ω_2 are the components of the spin-over mode vorticity as seen before. Ω_3 comes from the nonlinear feedback of the spin-over mode on the basic rotation around the \mathbf{z} axis. If one writes $\Omega_\perp = \Omega_1 + i\Omega_2 = Ae^{i\phi}$, the amplitude A is the amplitude of the spin-over mode and ϕ is as before, the orientation of its vorticity in the equatorial plane (see expression 8.7). In particular when $\phi = \pi/4$, the vorticity is aligned along with the principal direction of stretching and thus is subject to strong amplification. From (8.8), one can get a single equation for Ω_\perp which reads (see [49]) :

$$\dot{\Omega}_\perp = -\frac{1}{2}i\varepsilon\bar{\Omega}_\perp + O(\varepsilon^2|\Omega_\perp|, \varepsilon|\Omega_\perp|^3),$$

where $\bar{\Omega}_\perp$ is the complex conjugate of Ω_\perp . As expected, equation(8.9) shows that the spin-over mode growth rate is equal to $\frac{1}{2}$. Note that contrary to the case of the elliptical instability in a cylinder [26, 27], the contribution from the nonlinear terms here remains small as long as the amplitudes are not of order 1. This implies that in the non viscous case, the linear regime is expected to be valid up to large amplitudes even in the limit of small ε .

The non viscous time evolution of Ω_\perp and Ω_3 is computed from equation (8.8) and is illustrated on figure 8.9. It appears that Ω_3 can be smaller than -1 which means that the axial rotation changes its sign. When such an event occurs (at $t = 140$ on the figure), the stretching direction becomes a direction of compression which induces in turn a decrease of the amplitude of the spin-over mode. Thus, the system enters a cycle of heteroclinic oscillations. Although this singular dynamic is very attractive, it is not expected to resist to the addition of a small amount of viscous damping generated in the boundary layers.

As no rigorous viscous nonlinear theory of the dynamic of the spin-over mode is accessible today, we propose here to consider a simple model where only the viscous effects associated with the boundary layers are taken into

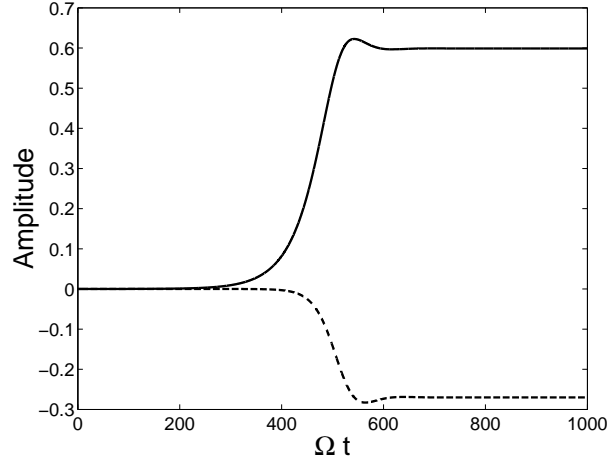


Figure 8.10: Nonlinear viscous evolution of the spin-over mode amplitude (solid line) and of the nonlinear correction Ω_3 (dashed line) for $E = 5 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon = 0.16$

account. Indeed, as already mentioned the global volume viscous effects are exactly null and the contribution of the internal shear layers is expected to be small. This model writes :

$$\begin{aligned}
 \dot{\Omega}_1 &= -\frac{\varepsilon}{(2-\varepsilon)}(1 + \Omega_3)\Omega_2 + \nu_{SO}\Omega_1, \\
 \dot{\Omega}_2 &= -\frac{\varepsilon}{(2+\varepsilon)}(1 + \Omega_3)\Omega_1 + \nu_{SO}\Omega_2, \\
 \dot{\Omega}_3 &= \varepsilon\Omega_1\Omega_2 + \nu_{EC}\Omega_3 + \nu_{NL}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2).
 \end{aligned} \tag{8.9}$$

In these equations, $\nu_{SO} = -2.62\sqrt{E}$ is the linear viscous damping rate of the spin-over mode given in (8.6) and first calculated by Greenspan. The coefficient $\nu_{EC} = -2.85\sqrt{E}$ in the third equation of system (8.9) is the linear viscous damping of axial rotation. The third coefficient $\nu_{NL} = 1.42\sqrt{E}$ is the viscous boundary layer effect on the nonlinear interaction of the spin-over mode with itself. It is calculated in the same way as the others (see [39]). It is important to mention that the equations do not contain all the viscous term of order $O(\sqrt{E})$. Interactions of the viscous nonlinear correction with the spin-over mode have not been considered. Moreover, we recall that the nonlinear corrections induced by the internal shear layers have also been neglected. System (8.9) generates a dynamic which is significantly different from the non viscous evolution (figure 8.9). In particular, the oscillations disappear. Figure 8.10 shows a typical evolution for $\varepsilon = 0.16$ and $E = 5 \cdot 10^{-4}$. Both the amplitude A and the nonlinear correction Ω_3 now saturate. As we will see in the next section, this type of evolution is in agreement with the experimental observations.

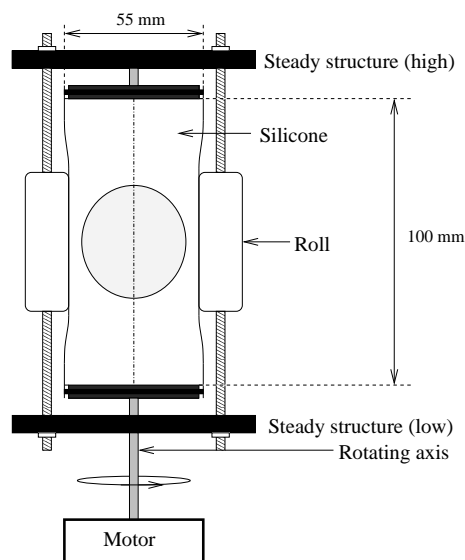


Figure 8.11: Experimental setup

8.3 Experimental results

8.3.1 Experimental set-up

The experimental setup is presented on figure 8.11. The device consists essentially in the one used by Eloy *et al.* [27] in their study of the elliptical instability in the cylindrical geometry. The main idea, originally exploited by Malkus [81] is to set into rotation a flexible container whose boundary is deformed by a gentle compression created by two rollers. These rollers are positioned on each side of the container in such a way that its cross section has an elliptic shape. In this way, the streamlines of the rotating flow are closed ellipses and as the boundary rotates together with the fluid, eventual centrifugal instabilities are suppressed.

The hollow sphere is realised with the help of a ping-pong ball. This ball is plunged in a cylinder filled by silicone polymer (NUSIL-MED 6015) which is then cured at a temperature of $60^{\circ}C$. This silicone gel is optically transparent and thus permit visualisations and non intrusive measurements of the flow. The ball, made of cellulose nitrate is then dissolved by a solvent (ethyl acetate) which is injected inside the ball by two 2mm stainless steel pipes aligned on the axis of the silicone cylinder. These pipes will also be used to fill up the sphere with the working fluid (water at room temperature). Moreover, during all the moulding operations, these pipes maintain firmly the ping-pong ball in place inside the gel cylinder. The obtained hollow sphere has a radius equal to $21.75mm$ and is centred inside the transparent silicone cylindrical block whose diameter is $50mm$ and length $100mm$. This cylinder is then clamped on the rotating device and compressed by the use of two rollers. Therefore, radius of the sphere reads as required in the previous

section :

$$R(\theta, z) = (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \cos(2\theta) \right).$$

The angular velocity of the sphere is varied between 0 and 300 *rpm* by an a.c. electric motor which is controlled with an accuracy better than 2%. The range of Ekman numbers which is explored is $[6.5 \cdot 10^{-5}, 10^{-1}]$. The ellipticity of the container is determined by the separation distance between the rollers and cannot be changed during rotation. Two values of ε have been chosen : 0.08 and 0.16. When the rotation rate of the spheroid is fixed to the desired value, the container is stopped and a delay time of several minutes is necessary to damp any flows before starting the rotation again. Each run consists of a spin-up regime during which water is set into rotation. Then if the rotation rate is large enough, the development of the instability can be observed. As the experiments are realised near the instability threshold, the characteristic growth time of the instability is much larger than the transient time of the spin-up and decorrelation of both phenomena is expected. The flow is seeded with anisotropic particles (Kalliroscope) and a thin light sheet formed using a 4W Argon laser, is sent on a meridional plane of the flow. The particles reflect the light following their orientation and thus permit the observation of the flow patterns. As presented in figure 8.12-a, the spin-up shear layer progresses toward the axes of rotation. At the end of this transient, the vortex core is particularly well visualised (see figure 8.12-b). This transient lasts around 10s in the range of Ekman numbers that we explore.

8.3.2 Visualisation of the instability

Figure 8.13 shows an asymptotic state reached some minutes after the onset of rotation. The stationary S shape of the vortex core reflects the combination of the basic driving rotation versus the vertical axis, with the solid body rotation around an axis contained in the horizontal plane and due to the spin-over mode. This mode is very strong near the centre of the sphere and its magnitude decreases closer to the boundary. In particular, the vortex core reconnects to the rotation axis at the poles of the sphere. In the following section we present the video analysis of these visualisations that permits the extraction of the growth rate of the instability and also the description of the saturated state.

Another way to observe the flow is to send the laser sheet in a plane perpendicular to the axis of rotation. The flow is now observed from above. Figure 8.14 presents such a visualisation in a plane near the maximum of distortion of the S shaped vortex core. The rollers, not visible on this image, are positioned on each side of the sphere, on the horizontal axis of the figure. As it can be clearly observed, the vortex core intersects the plane of visualisation and a bright spot is visible. In fact the whole flow rotates around this spot which is clearly off-centred and aligned in a direction close to the direction of maximum stretching, at $\pi/4$ from the ellipse axes.

Figures 8.13 and 8.14 agree with the deformation of the vortex core as predicted by the theoretical analysis presented in the previous sections.

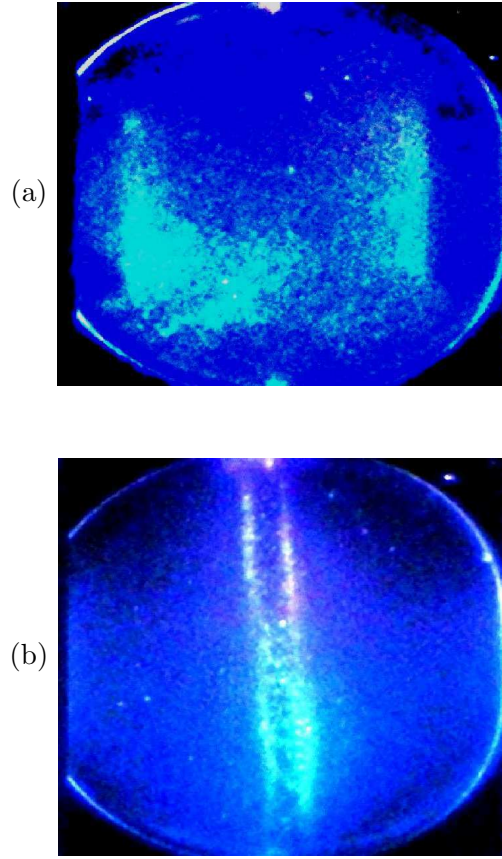


Figure 8.12: Two snapshots in a meridional plane of the spin-up in the ellipsoid for $E = 2.5 \cdot 10^{-4}$ and $\varepsilon = 0.16$. The progression of the front is observed at the beginning (a) and at the end (b) of the spin-up phase.

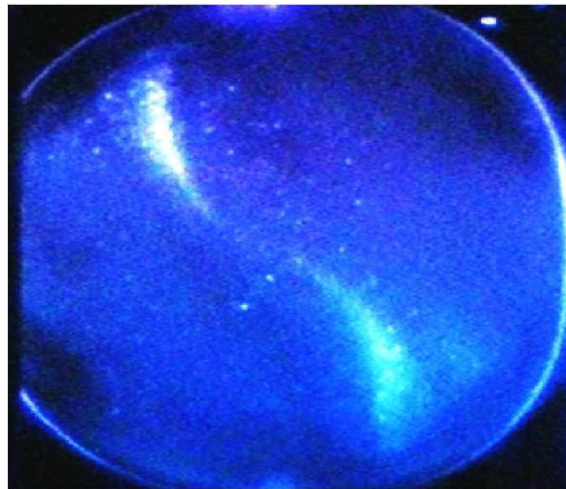


Figure 8.13: Visualisation of the spin-over mode in a meridional plane for $E = 2.5 \cdot 10^{-4}$ and $\varepsilon = 0.16$. The typical S shape of the rotation axis is due to the combination of the main rotation, the spin-over mode and viscous boundary layers.

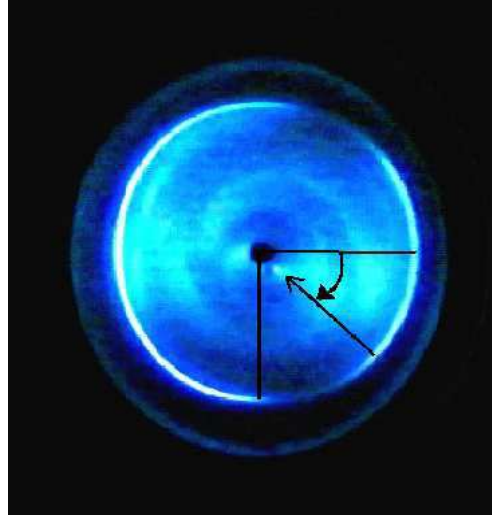


Figure 8.14: Visualisation of the spin-over mode in a plane perpendicular to the main rotation axis for $E = 2.9 \cdot 10^{-4}$ and $\varepsilon = 0.16$. The bright spot, indicated by the arrow, is the rotation centre in the visualisation plane. It is approximatively oriented along with the principal direction of stretching, that is $\frac{\pi}{4}$ away from the ellipse axis as indicated.

This mode is observed and saturates above a critical Ekman number which depends on the ellipticity ε (theoretically $E_c = 2.31 \cdot 10^{-4}$ for $\varepsilon = 0.08$ and $E_c = 9.23 \cdot 10^{-4}$ for $\varepsilon = 0.16$). Below a secondary threshold (around $E = 2 \cdot 10^{-4}$ for $\varepsilon = 0.16$), high frequency small scales structures appear between the vortex core and the sphere surface. At $E = 1.68 \cdot 10^{-4}$, a secondary instability destabilises the spin-over mode and an intermittent regime appears. Finally, at higher rotation rate, a permanent disordered flow takes place in the spheroid.

8.3.3 Video analysis of the instability near threshold

The spatio-temporal diagram shown in figure 8.15-a represents the time evolution of the light intensity recorded on a horizontal chord in a meridional plane chosen so that the vortex core is clearly visible as it can be seen in figure 8.13. The chord is positioned 5 mm under the equatorial plane. After the spin-up transient which is represented by the funnel shape of the bright area, the growth of the mode amplitude is directly linked to the deviation of this bright area from the axis of symmetry of the figure as time is increasing. As expected, the two phenomena (spin-up and spin-over) are well separated in time. Then the simple shape of the spin-over mode permits to estimate quantitatively the growth rate of the instability. Indeed, we know that the total velocity can be written as $v(r, z) = r\vec{e}_\theta \pm A(t)(z \sin(\theta)\vec{e}_r + z \cos(\theta)\vec{e}_\theta - r \sin(\theta)\vec{e}_z)$. As the plane of visualisation was chosen so that $\theta = 0$ or π , the velocity is purely azimuthal and the core vortex position (vanishing velocity) is defined by $r = \pm A(t)z$. As z is equal to a constant, given by the position of the chosen chord, the temporal evolution of r gives exactly the temporal growth of the instability. Figure 8.15-b shows

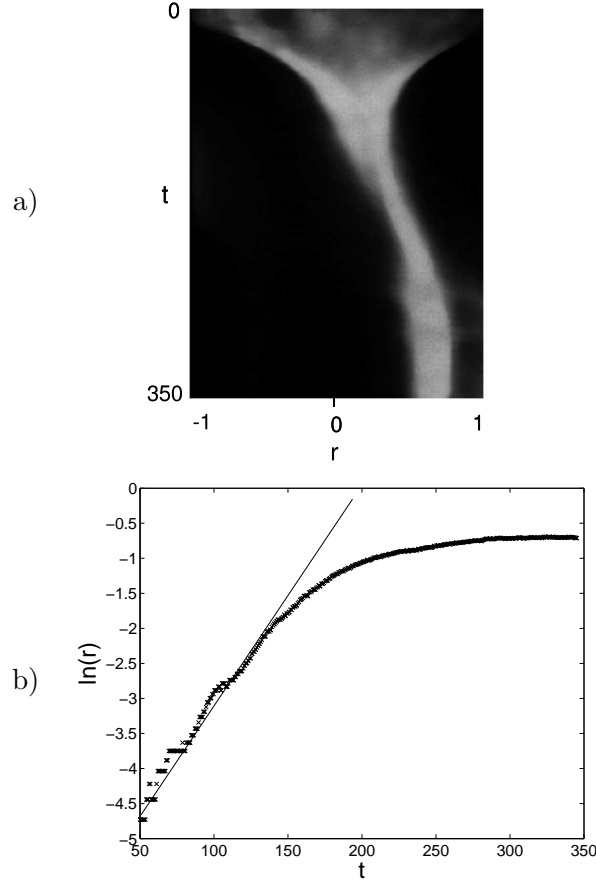


Figure 8.15: a) Spatio-temporal evolution of the flow recorded along a line oriented along with the principal direction of stretching. The spin-up phase, characterised by the convergence of the two fronts towards the centre, and the growth of the spin-over mode, characterised by the displacement of the vortex centre position, are both visible. b) Semilogarithmic plot of the vortex centre position as a function of time. The exponential growth and the saturation are well defined. ($E = 2.5 \cdot 10^{-4}$ and $\varepsilon = 0.16$).

the deformation of the vortex core versus time in semi-logarithmic scale. As it can be seen on this figure, the exponential growth is perfectly recovered before saturation.

Using this video image analysis, we are able to measure the experimental growth rate for different Ekman numbers. Figure 8.16 shows the comparison between the experimental values measured for two values of ε and the corresponding theoretical prediction computed as shown in Section 2. As observed, the comparison between the experimental growth rates and the theoretical ones is good specially for $\varepsilon = 0.16$. In particular, the calculated threshold values ($E_c = 2.31 \cdot 10^{-4}$ for $\varepsilon = 0.08$ and $E_c = 9.23 \cdot 10^{-4}$ for $\varepsilon = 0.16$) are consistent with the experimental observations. The error bars are estimated from the standard deviation which is obtained from different experimental runs. The errors come from the difficulty to accurately determine the position

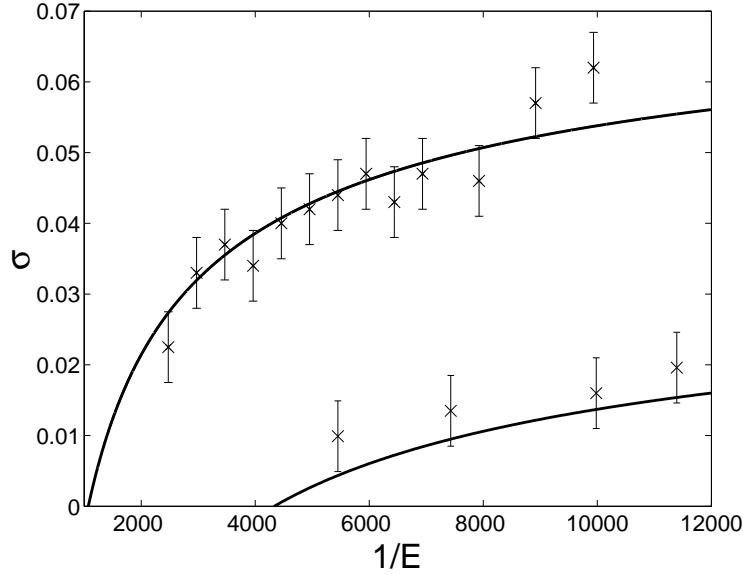


Figure 8.16: Growth rate versus the inverse of the Ekman number for $\varepsilon = 0.08$ (lower) and $\varepsilon = 0.16$ (upper). Experimental results (\times) and linear theory (solid line).

of the rotation axis in the spatio-temporal diagrams.

The comparison of these experimental results with the nonlinear model predictions can also be investigated. Figure 8.17 shows the time evolutions of the amplitude of the vortex core deformation for two chosen Ekman numbers. As it can be seen, results compare correctly although our experimental measurements do not show the over-shoot fluctuations occurring just after the initial exponential growth. As observed on figure 8.17, the theoretical saturation of the amplitude is reached after some damped oscillations. This feature was not observed in the experiment. Note however that the estimation of the asymptotic amplitude of deformation is correctly recovered just above threshold but remains close to the values found theoretically at the over-shoot. Indeed, this phenomenon is confirmed by the comparison of the saturation angle versus \mathbf{z} of the vortex core deformation as a function of the Ekman number. Figure 8.18 shows that experimental results systematically approach the maxima of the angle obtained by the theory (and not the asymptotic ones) and never come back to the expected ones which are slightly lower. We have no interpretation of this effect but we suspect that the visualisation technique, based on the behaviour of the kalliroscope flakes, could be at the origin of this discrepancy. For the flow in a deformed rotating cylinder, analysed by Eloy *et al.* [27], the same discrepancy was observed. However, P.I.V measurements were able to reveal amplitude oscillations before saturation. This might be also the case in the present geometry.

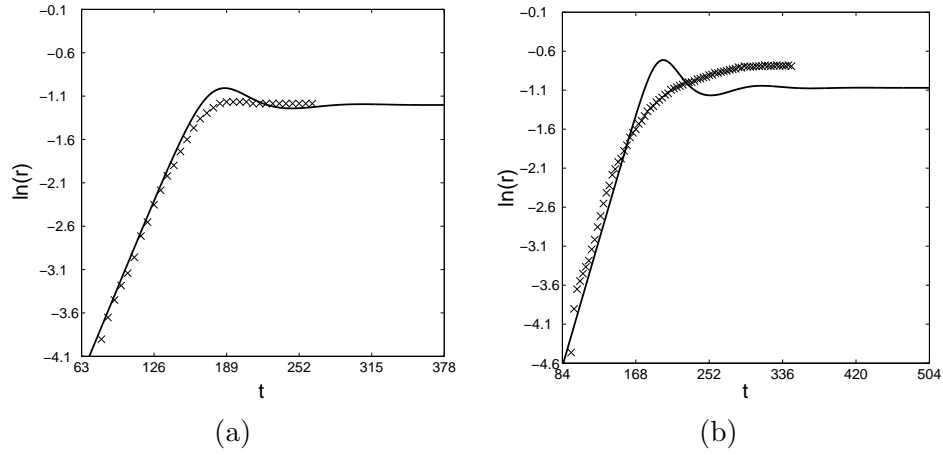


Figure 8.17: Comparison between the experimental results (\times) and the nonlinear model for $E = 3.4 \cdot 10^{-4}$ (a) and $E = 2.5 \cdot 10^{-4}$ (b) with $\varepsilon = 0.16$.

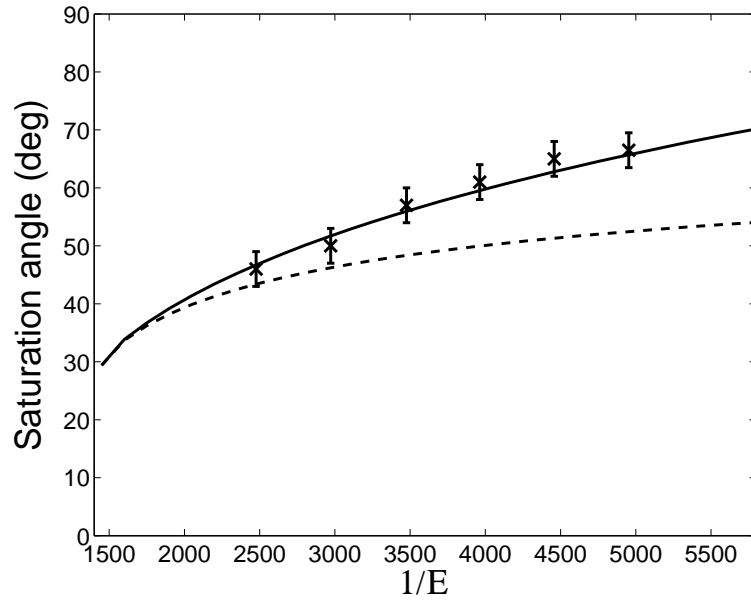


Figure 8.18: Evolution of the saturation angle. Experimental data (\times). Nonlinear model (solid line -maximum angle- and dashed line -asymptotic angle-).

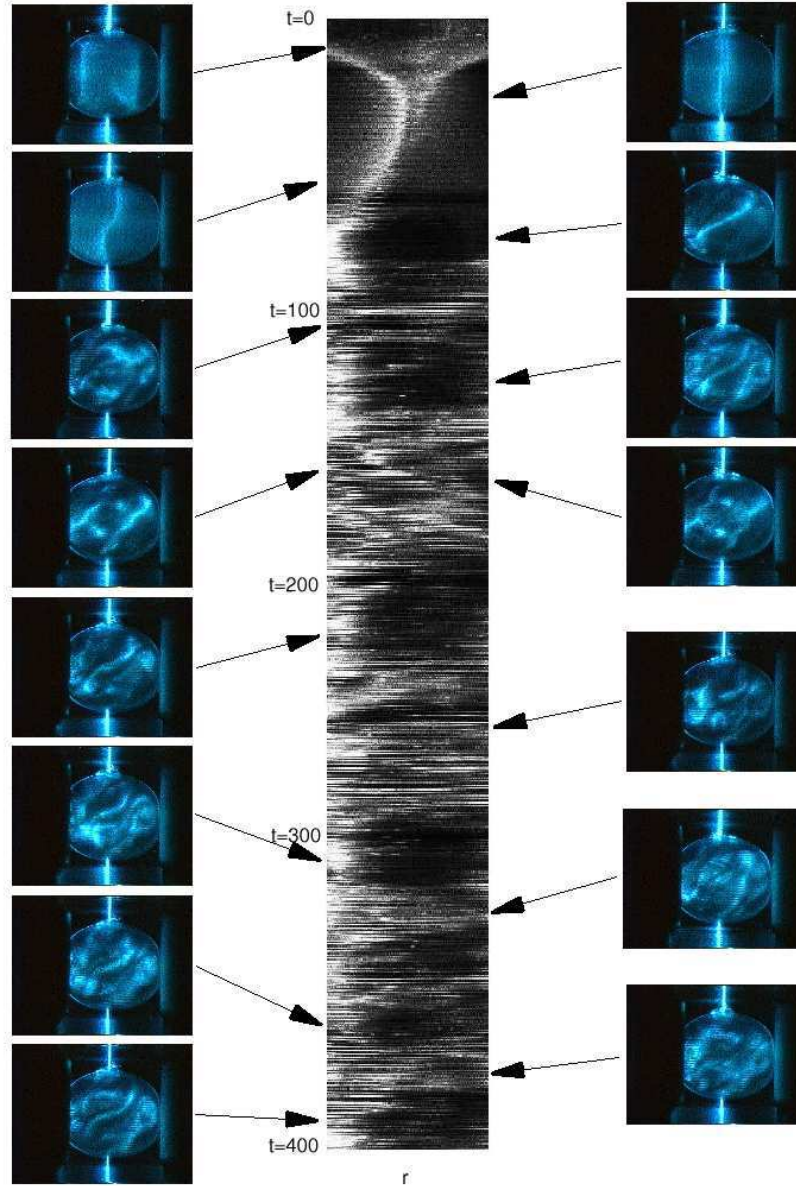


Figure 8.19: Visualisations in the meridional plane of the flow patterns during the spatio-temporal evolution of the intermittent regime ($E = 1.68 \cdot 10^{-4}$ and $\varepsilon = 0.16$). The bursts observed in the spatio-temporal diagram (centre) correspond to disordered phases during which the S shape of the spin-over mode disappears intermittently (side view).

8.3.4 Secondary instability and intermittent regime

Figure 8.19 represents a spatio temporal evolution of the constrained flow for $E = 1.68 \cdot 10^{-4}$. This diagram is illustrated by a series of corresponding images that visualise the different states of the flow. The spin-up phase is observed in the first part ($t < 30$). It is immediately followed by the elliptical instability growth as described in the preceding sections. The spin-over mode is observed to saturate for $70 < t < 80$. During this period small structures appear between the vortex core and the sphere boundary. Meanwhile, a secondary instability taking the form of a pulsing wave which appears in the central part of the S deformed vortex core. Figure 8.20 presents a visualisation of the flow and the corresponding space time diagram. This diagram was performed on a segment crossing perpendicularly the vortex. It shows the periodic pulsation of this secondary mode. The Fourier spectrum of a time series originating from this diagram shows a frequency peak at 2.13 (figure 8.21). This value is close to the one calculated by Kerswell [48] in the cylinder (2.27) and observed by Eloy *et al.* [26]. This secondary instability then leads to a destructure of the flow. The apparently disordered state appears for the first time around $t = 100$. It is followed by a relaminarisation process during which the spin-over mode reappears. The flow then enters an intermittent regime with a succession in time of the spin-over mode and chaotic flows. Contrary to the cylindrical case where intermittency has also been observed by Malkus [81] and Eloy *et al.* [26], the flow never comes back to the basic rotation around the $(0z)$ axis but always relaminarises toward the spin-over mode. A sequence of this intermittent regime is displayed in the space-time diagram of figure 8.19 and shows several switches between the well formed spin-over mode and more disordered flows. The different phases have a duration around one hundred periods of the basic rotation.

8.4 Conclusion

The elliptical instability of a fluid flow contained in a rotating spheroid has been investigated both theoretically and experimentally. A linear stability analysis has been performed in the limit of weak deformation and small Ekman numbers. A stability diagram showing the characteristics of the most unstable mode has been obtained as a function of the deformation ε and of the Ekman number E . The spin-over mode, which corresponds to a solid body rotation perpendicular to the main rotation axis, has been found to be the first mode to be destabilised as ε increases or E decreases. It has also been found to be the most unstable mode for the parameters of the experiment. As predicted, our experiment exhibits the structure of the flow pattern and the growth associated with the spin-over mode. The measurement of the experimental growth rate shows that it corresponds to the theoretical predictions especially near the instability threshold. A simplified nonlinear model was also constructed to account for the experimental observations. Without viscosity, the model predicts large periodic heteroclinic oscillations during which the spin-over mode is even able to reverse the sign of the basic flow rotation. This peculiar behaviour has been shown to be sup-

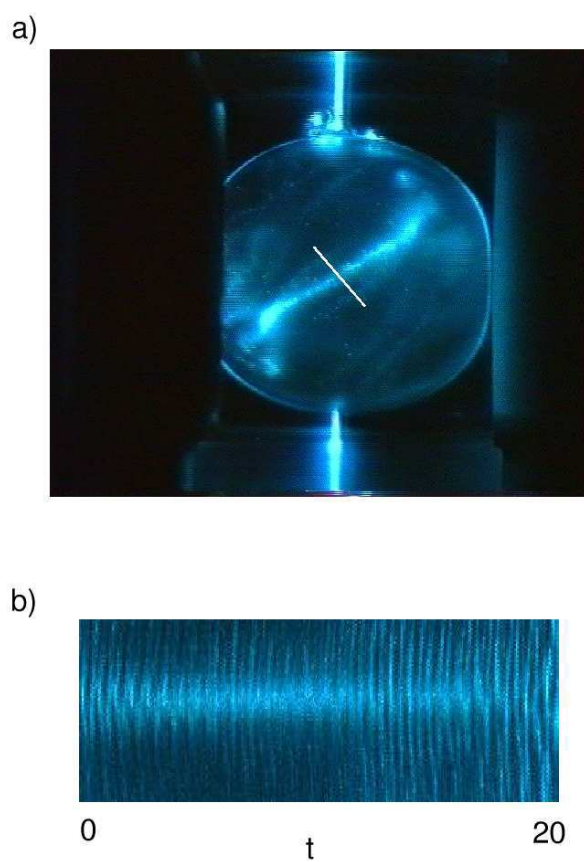


Figure 8.20: Secondary instability of the flow. $E = 1.68 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon = 0.16$. a) visualisation of the flow, b) spatio-temporal diagram built along the white line of figure a).

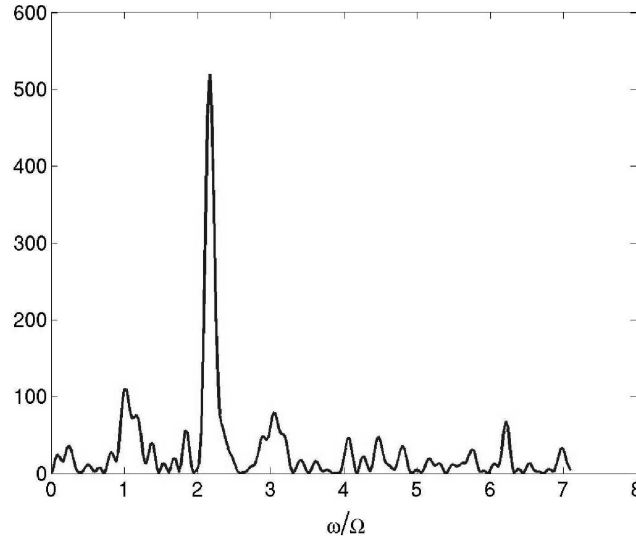


Figure 8.21: Spectrum (arbitrary unit) of the secondary instability of the flow. $E = 1.68 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon = 0.16$.

pressed by the addition of the viscous effects associated with the boundary layers. In that case, a saturated regime is reached asymptotically whose characteristics are in agreement with the experimental measurements. Finally, similarly to the observations of the elliptic instability in cylinders, an intermittent regime has also been observed in the sphere. This chaotic regime with cycles hundred times longer than the basic rotation period seems to be triggered by a secondary instability. The analysis of its characteristics is left for future work.

9. INSTABILITÉ INERTIELLE : ANALOGIE FLUIDE-SOLIDE

9.1 Du fluide au solide.

Dans le chapitre précédent, les équations faiblement non linéaire décrivant la stabilité d'un fluide visqueux en rotation dans une sphère déformée ont été dérivées. Nous avons vu que cet écoulement est instable (instabilité elliptique) et que, de plus, la configuration instable dominante (le mode de “spin-over”) est caractérisée par la variation au cours du temps de l'axe de rotation du fluide. Un régime saturé provenant de l'équilibre entre les effets de viscosité et du terme non linéaire a été mis en évidence pour certaines gammes des paramètres [58].

Ce mode de spin-over étant une rotation solide, il est alors solution exacte des équations d'Euler pour un fluide non visqueux en rotation dans une sphère [98, 49]. Dans le chapitre 8, nous avons ainsi représenté la dynamique non visqueuse et non linéaire de ce mode instable par une variation temporelle de l'axe de rotation du fluide qui est à tout instant une combinaison linéaire de trois rotations autour de directions fixes. Dans le cas de la sphère déformée, ces directions sont les trois axes de l'ellipsoïde. Nous avons alors constaté que l'axe de rotation du fluide pouvait varier de façon cyclique sur une trajectoire hétérocline. Les deux positions d'équilibre instable associées à ce cycle hétérocline correspondent à la superposition de l'axe de rotation et de l'axe médian de l'ellipsoïde. Deux sens de rotation opposés sont, en effet, définis autour de cet axe : ces deux rotations sont associées aux deux solutions instables.

L'aspect surprenant de la dynamique non visqueuse de cet écoulement est la similitude entre les équations qui régissent cette dynamique et les équations d'Euler pour un solide de géométrie identique en rotation [62, 5]. Nous ne prétendons pas, dans cette partie, faire une analogie complète (problème décrit par Arnold [5]) entre ces deux problèmes mais seulement souligner la similitude des équations d'Euler écrites pour un fluide et pour un solide dans le cas particulier d'une géométrie ellipsoïdale. Une expérience simple qui met en évidence le cycle hétérocline mentionné ci-dessus sera également présentée.

9.2 Equations d'Euler : solide et fluide.

Soit un ellipsoïde dont la surface est paramétrée par l'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 . \quad (9.1)$$

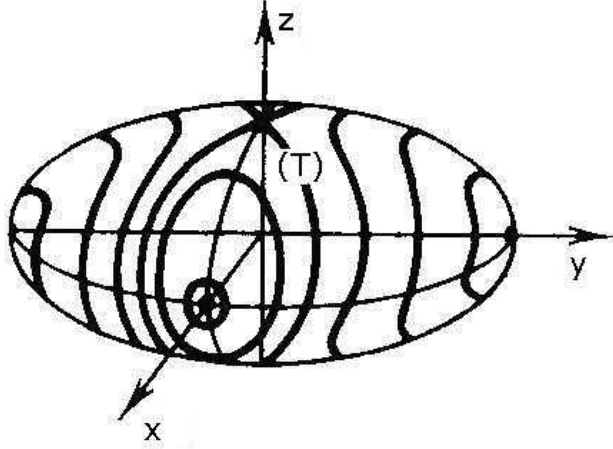


Figure 9.1: Schématisation de la surface d'un ellipsoïde et des trajectoires des solutions du modèle d'Euler.

Un tel ellipsoïde est schématisé figure 9.1. Les directions x , y et z définissent respectivement le petit axe, le grand axe et l'axe médian (ou axe moyen). Les constantes a , b et c vérifient alors $a < c < b$.

Dans le cas où l'ellipsoïde est un solide plein, x , y et z sont les directions principales d'inertie. Ainsi, la matrice d'inertie \mathcal{I} s'écrit dans cette base

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix},$$

avec $I_x = \frac{m}{5}(b^2 + c^2)$, $I_y = \frac{m}{5}(a^2 + c^2)$ et $I_z = \frac{m}{5}(b^2 + a^2)$ et m la masse de l'ellipsoïde.

Nous considérerons dans la suite que les seuls degrés de liberté de l'ellipsoïde sont les rotations autour des trois directions principales d'inertie, *i.e.* que son centre est supposé fixe. Ainsi, dans le référentiel lié aux trois axes d'inertie, la conservation du moment cinétique \mathcal{M} s'écrit

$$\frac{d}{dt}\mathcal{M} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathcal{M} = 0, \quad (9.2)$$

avec $\mathcal{M} = \mathcal{I}\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Omega}$ étant le vecteur rotation de l'ellipsoïde par rapport au référentiel fixe dans le repère défini par les directions principales d'inertie. On obtient après simplification les équations d'Euler pour un ellipsoïde solide :

$$\begin{aligned} (b^2 + c^2) \frac{d}{dt}\Omega_1 &= (b^2 - c^2)\Omega_2\Omega_3, \\ (c^2 + a^2) \frac{d}{dt}\Omega_2 &= (c^2 - a^2)\Omega_3\Omega_1, \\ (a^2 + b^2) \frac{d}{dt}\Omega_3 &= (a^2 - b^2)\Omega_1\Omega_2, \end{aligned} \quad (9.3)$$

où Ω_i ($i = 1, 2, 3$) sont les trois composantes de $\boldsymbol{\Omega}$ dans les directions \mathbf{x} , \mathbf{y} et \mathbf{z} respectivement.

Nous allons maintenant considérer un fluide non visqueux en rotation dans l'ellipsoïde défini par l'équation 9.1 supposé fixe (*Cf.* chapitre 4). La forme générale des vecteurs vitesse \mathbf{u} et vorticité $\boldsymbol{\omega}$ associés à cette dynamique dans la base cartésienne est [49]

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Omega_2 \frac{a}{c} z - \Omega_3 \frac{a}{b} y \\ \Omega_3 \frac{b}{a} x - \Omega_1 \frac{b}{c} z \\ \Omega_1 \frac{c}{b} y - \Omega_2 \frac{c}{a} x \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \Omega_1 \frac{b^2 + c^2}{bc} \\ \Omega_2 \frac{a^2 + c^2}{ac} \\ \Omega_3 \frac{a^2 + b^2}{ab} \end{pmatrix}.$$

Les termes en a , b et c représentent le cisaillement induit par la déformation sur les champs de vitesse et de vorticité. De plus, Ω_i dépend du temps mais est invariant en espace. On constate d'ores et déjà que le vecteur vorticité du fluide a une structure similaire au moment cinétique de l'ellipsoïde et peut, en effet, s'écrire :

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{5}{m} \begin{pmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix}^{-1} \mathcal{M}.$$

La vorticité du fluide est égale, à une constante multiplicative près, au moment cinétique du solide dont chaque composante est adimensionnée par l'aire de sa surface d'application.

Les champs de vitesse et de vorticité décrit ci-dessus sont solutions des équations d'Euler pour un fluide. L'équation de transport de la vorticité s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0. \quad (9.4)$$

Après simplification de l'équation (9.4), on obtient à nouveau le système d'équations (9.3).

Il existe donc une dynamique équivalente pour un ellipsoïde solide en rotation et un fluide non visqueux en rotation dans un ellipsoïde fixe. Ainsi, le cisaillement du fluide induit par la déformation du container a la même influence que la force de Coriolis sur un solide asymétrique en rotation.

Pour une comparaison avec l'expérience décrite dans le chapitre précédent, nous allons poser $c = 1$, $a = 1 - \varepsilon/2$ et $b = 1 + \varepsilon/2$ ($\varepsilon \ll 1$). ε est appelé excentricité ou ellipticité. Les équations d'Euler fluide et solide pour notre problème deviennent alors au premier ordre pour le paramètre ε :

$$\begin{aligned}
(2 - \varepsilon) \frac{d}{dt} \Omega_1 &= -\varepsilon \Omega_3 \Omega_2 , \\
(2 + \varepsilon) \frac{d}{dt} \Omega_2 &= -\varepsilon \Omega_3 \Omega_1 , \\
\frac{d}{dt} \Omega_3 &= \varepsilon \Omega_1 \Omega_2 .
\end{aligned} \tag{9.5}$$

Une simple étude de stabilité montre qu'une condition initiale de rotation Ω_0 autour de l'axe médian est instable alors que les rotations autour du grand axe et du petit axe sont stables.

Nous présentons sur la figure 9.2, le résultat d'une simulation des équations (9.5) pour une rotation initiale autour de l'axe médian ($\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega_0)$) et $\varepsilon = 0.1$ comme nous l'avons fait au chapitre 8. Maintenant sont tracées au cours du temps les évolutions des amplitudes de perturbation de la rotation Ω_3/Ω_0 autour de l'axe médian \mathbf{z} et de la rotation $\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}/\Omega_0$ dans le plan perpendiculaire. On constate que l'axe de rotation instable ne tend pas vers une des deux positions stables ($\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_0, 0, 0)$ ou $\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega_0, 0)$) mais vers une autre position d'équilibre instable définie par une rotation $-\Omega_0$ par rapport au vecteur \mathbf{z} ($\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, -\Omega_0)$). Un cycle entre ces deux positions d'équilibre instable est alors observé (cycle hétérocline). La schématisation des trajectoires, définies par l'intersection de l'axe de rotation avec la surface de l'ellipsoïde, pour différentes conditions initiales est représentée figure 9.1. La trajectoire marquée (T) est la trajectoire représentative de la simulation présentée sur la figure 9.2. On constate que toute autre condition initiale est marginalement stable et définit une solution oscillante autour d'une des deux positions stables. L'ajout de viscosité ou de frottement solide entraîne une convergence de ces solutions vers une des deux positions stables. Les trajectoires fermées de la figure 9.2 deviennent alors des spirales qui convergent vers un des axes définissant les position stables.

La similitude qu'il existe entre les dynamiques fluide et solide peut être interprétée par un raisonnement physique qualitatif simple comme suit. Le cisaillement induit dans le cas du fluide une amplification de la vorticité horizontale dans la direction d'étirement [25]. Une analyse linéaire de l'équation de vorticité permet de montrer ce phénomène. Dans le cas du solide, la force de Coriolis induit un couple perpendiculaire à l'axe de rotation. Ce couple fait "basculer" l'axe de rotation dans la direction définie par le vecteur couple. L'aspect quantitatif de ces deux phénomènes est d'après les équations présentées ci-dessus équivalent.

Il est à noter que la différence majeure entre le solide et le liquide est le référentiel dans lequel la solution présentée sur la figure 9.2 est définie. En effet, dans les deux cas, cette solution est vérifiée dans un référentiel lié aux axes de l'ellipso ide. Ainsi, pour le solide ce référentiel est en rotation alors que pour le fluide ce même référentiel est fixe.

Si l'on imagine maintenant que l'on fait tourner une toupie de forme ellipsoïdale solide sur une table autour de son axe de rotation instable, que peut-il se passer ? En théorie, l'ellipso ide à l'origine en rotation autour d'un

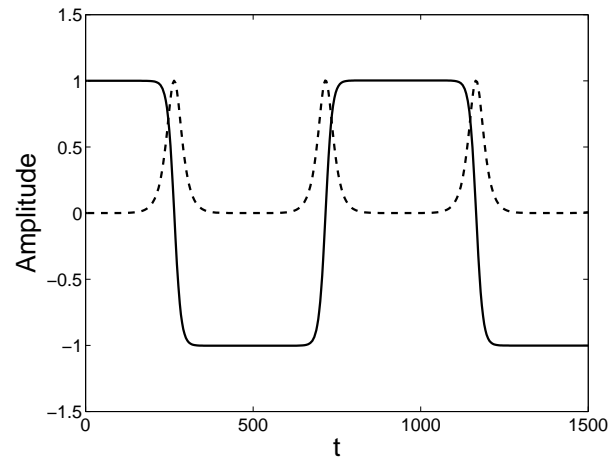


Figure 9.2: Simulation des équations d'Euler pour $\varepsilon = 0.1$. le trait plein est l'amplitude selon z et le trait discontinu selon le plan perpendiculaire à z passant par le centre de l'ellipsoïde.

axe perpendiculaire à la table devrait voir cette axe varier au cours du temps. Nous allons voir dans la suite que c'est finalement l'ellipsoïde qui s'adapte par rapport à l'axe de rotation vertical et non l'axe de rotation qui varie par rapport à la perpendiculaire de la table.

9.3 Expérience d'un fluide non visqueux ?

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 8, la prise en compte de la viscosité change radicalement la dynamique du fluide dans l'ellipsoïde. La dynamique présentée ci-dessus n'est plus compatible avec le raccord de l'écoulement au niveau des couches limites. Nous avons d'ailleurs constaté expérimentalement un écoulement bien plus complexe au delà d'une vitesse de rotation critique (*Cf.* chapitre 8). Dans ce cas, il semble impossible de visualiser expérimentalement la dynamique cyclique que nous venons de décrire. Pourtant ce lien mis en évidence avec la dynamique des solides donnent une nouvelle vision d'un fluide non visqueux. En effet, le seul effet visqueux dans le cas du solide est le frottement entre le solide et la table. Ce frottement est nettement moins contraignant sur la dynamique "non visqueuse" comme nous allons le constater.

Nous nous proposons de visualiser la dynamique cyclique d'un ellipsoïde solide afin d'imiter la dynamique d'un fluide non visqueux. L'axe médian de l'ellipsoïde, fabriqué en PVC, est repéré par deux pastilles de couleurs rose et jaune collées sur les faces opposées. Un caméra permet de visualiser la rotation de l'ellipsoïde vu par le dessus. Une séquence typique de cette expérience est présentée sur la figure 9.3.

Nous pouvons observer deux cycles de la dynamique présentée ci-dessus. Comme nous l'avons mentionné, l'axe de rotation initial reste préférentiel, *i.e.* que l'axe de rotation de l'ellipsoïde à un instant t , mis en évidence figure 9.2 s'aligne avec la verticale.



Figure 9.3: Série d'images d'un ellipsoïde mis en rotation par rapport à son axe médian d'inertie.

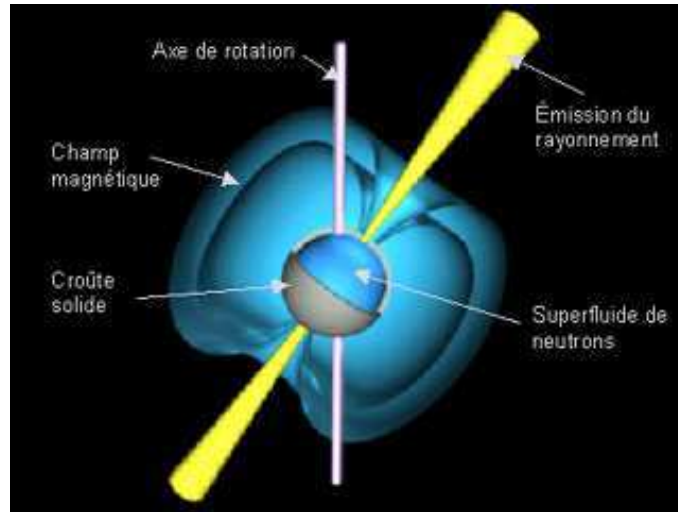


Figure 9.4: Structure d'une étoile à neutron

9.4 Conclusion

Une telle analogie fluide-solide que nous venons de décrire a déjà été explorée dans d'autres domaines de la physique. En particulier, la dynamique de condensats de Bose-Einstein en rotation a montré l'existence de basculement d'axe de rotation. En effet, les équations décrivant le mouvement d'une ligne tourbillonnaire dans un condensat de Bose-Einstein, légèrement non sphérique, sont aussi identiques aux équations d'Euler du solide [118]. Une telle dynamique peut alors être envisagée dans le cas des superfluides (fluide de Boson dont les propriétés sont décrites par la condensation de Bose-Einstein [80]). Le superfluide d'abord découvert lors du refroidissement de l'Hélium serait également présent dans certaines étoiles sous forme de superfluide à neutron appelées étoiles à neutrons [96] (voir figure 9.4). Ce type d'étoile, composée d'une croûte solide entourant un superfluide, possède une très grande vitesse de rotation. Dans le cas d'étoiles binaires à neutron (deux étoiles en orbite l'une autour de l'autre), une dynamique comparable à l'instabilité elliptique pourrait alors être envisageable si la période de rotation de l'étoile est différente de la période de révolution du système binaire.

10. INSTABILITÉ ELLIPTIQUE DANS UNE COQUILLE SPHÉRIQUE

Ce chapitre est constitué d'un article soumis à Physics of the Earth and Planetary Interiors : Lacaze L., Le Gal P. and Le Dizès S., "Elliptical instability of a flow in a spherical shell" [59].

Abstract

A theoretical and experimental study of the spin-over mode of the elliptical instability of a flow contained in a slightly deformed rotating spherical shell is presented. This geometrical configuration mimics the liquid rotating cores of planets when deformed by tides coming from neighboring gravitational bodies. Theoretical estimations of the growth rates and of the non linear amplitude saturations of the unstable mode are compared to experimental data obtained from Laser Döppler anemometry measurements. Visualizations and descriptions of the various characteristics of the instability are given as functions of the flow parameter.

10.1 Introduction

It is known from the seminal analysis of Kelvin [47] that inertial waves whose origin comes from the restoring effect of the Coriolis force are eigenmodes of rotating fluid flows. These modes, neutral for inviscid flows but damped by viscosity, can however be observed in real flows when an external forcing is applied. For instance, McEwan [85] or Greenspan [39] visualized the wave patterns created by these inertial -or so called Kelvin- waves in rotating cylindrical tanks when a small excitation is added to the flow by the use of a small differentially rotating disc immersed in the fluid. Another example can be found in Aldridge & Toomre [2] where some of the eigenmodes of a rotating sphere were excited by applying a resonant modulation on the rotating velocity. Later, using an inner deformable body placed inside a rotating sphere, Aldridge *et al.*[3] and Seyed-Mahmoud *et al.* [108] described some of the inertial waves of the shell with different frequencies and spatial structures. In this last experiment, some features of the elliptical instability were also detected. This instability arises from the resonant interaction of triads of waves : two Kelvin waves plus the elliptical deformation of the fluid streamlines by the boundaries [122]. In fact, the elliptical instability has been intensively studied in the context of the transition to

turbulence of shear flows [124, 125, 90, 97, 8]. There, the elliptical deformation of the streamlines inside cylindrical vortex cores are induced by other vortices (see for instance [77, 87]) or by mean shear fields [71]. It is also believed that the elliptical instability could play a role in three-dimensional transition of shear flows [99] as wakes [78] and mixing layers [64] for instance. Contrary to these last studies relative to three-dimensional instabilities of rotating cylinders of fluids, the elliptical instability in spherical geometry rises completely different interests as it models the rotating inner liquid cores of planets subjected to tidal distortions induced by close gravitational bodies [117, 37, 52]. In particular the occurrence of this 'tidal' instability that may be associated with thermal or compositional convection of the molten cores of planets, such as the Earth, might be of prime importance in the generation or in the dynamics of the geomagnetic fields [52, 50]. Recent measurements of intrinsic magnetic fields in relatively small planets such as the Jovian moons Io and Ganymède [55, 56] may reinforce the interest in the study of inertial instabilities such as the elliptical or the precessional ones [82, 14, 92, 51]. With this aim, Aldridge *et al.* [3] and Seyed-Mahmoud *et al.* [108, 109] have performed computations and built as already mentioned, a rotating deformable shell where they observed the presence of the elliptical instability. Using the technique invented by Malkus in 1989 [81], and more recently used and extended to triangular distortions by Eloy *et al.* [27], we have applied an elliptical constraint to a deformable rotating sphere [58] and visualize the spin-over mode of the elliptical instability. This mode is a solid body rotation around an axis aligned with the stretching direction. Moreover, from video image processing, we have measured the growth rates of the instability as functions of the flow parameters. These experimental results were finally advantageously compared to predictions resulting from theoretical linear and non linear analyzes.

However, as it is the case for Earth, it may often be that, due to huge pressure forces, planet inner cores crystalize and leave liquid shells between the planet mantles and the solid inner cores. Therefore, it is of some importance to study the effect of inner rotating solid bodies in the development of the elliptical instability in spherical geometry. The present article concerns an extension of our previous work on the spin over mode of the elliptical instability in a full sphere [58] to the case of a rotating shell. In a first part, we present our theoretical model of the flow contained in the shell. The analysis of the elliptical instability in the inviscid limit and then in the viscous case, leads to the determination of the growth rate of the spin-over mode. In a second part, experimental results are presented. We used the same technique as before [58] but this time a solid small inner sphere is suspended by a thin wire in the center of a hollow transparent deformable external sphere. The ratio η between both sphere radius has been chosen equal to $1/3$ that is close to the value encountered in the Earth core. Visualizations and measurements by laser Döppler anemometry of several characteristics (growth rates, non linear saturation amplitude, spin-down time) of the spin-over mode of the shell are presented and compared to our theoretical predictions.

10.2 Linear stability analysis

10.2.1 Inviscid theory

The stability analysis of an inviscid fluid contained in a rotating and slightly deformed spherical shell is considered in this first section. It is assumed that only the outer sphere is deformed while the inner solid body remains spherical. Moreover, it is assumed that both spheres rotate around a vertical axis \mathbf{e}_z together at the same rate. This hypothesis is in accordance with our experimental device which will be presented later and is also a good approximation as regards to eventual geophysical applications. The elliptical deformation is considered to be a small perturbation amplitude parameter ε ($\varepsilon \ll 1$).

The zero order problem, $\varepsilon = 0$, corresponds to the case of a rotating fluid in a non-deformed spherical shell for which the main flow can be written in cylindrical coordinates as :

$$\mathbf{U} = r\mathbf{e}_\theta, \quad (10.1)$$

which satisfies both inviscid and viscous boundary conditions

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= R_{i_H}(z)\mathbf{e}_\theta & \text{at } r &= R_{i_H}(z), \\ \mathbf{U} &= R_{o_H}(z)\mathbf{e}_\theta & \text{at } r &= R_{o_H}(z), \end{aligned} \quad (10.2)$$

where $R_{i_H}(z) = \sqrt{R_i^2 - z^2}$ and $R_{o_H}(z) = \sqrt{R_o^2 - z^2}$ define the spherical boundaries in cylindrical coordinates. The variables have been non-dimensionalized with the angular velocity of the fluid Ω and the distance d between the two shells. R_i and R_o are respectively the inner and outer sphere radii and their ratio is given by $\eta = R_i/R_o$.

The derivation of inviscid normal modes for the basic elliptical flow is not as trivial as it is in the case of the full sphere [102]. For general rotating flows, the linearized Euler equations can be reduced to the so-called Poincaré equation [39]. This equation is hyperbolic and its solutions are thus sensitive to the applied boundary conditions. By chance, in the case of the full sphere, a separation of variables can be achieved and permits the obtention of the normal modes as it has been done by Greenspan [39]. The new variables are determined with respect to the outer spherical surface and are thus no more consistent when an inner body is added. To the best of our knowledge, no separation of variables have been discovered in the case of the shell. Rieutord & Valdettaro [101] and Rieutord *et al.* [102] studied this problem by considering the flow evolution along the characteristics of the hyperbolic equation. By this means, they could obtain an approximated description of the inertial modes of the shell. However, as the spin-over mode is a solid body rotation whose axis is perpendicular to the main rotating flow axis, it represents a very special simple solution of the linearized Euler equations associated with the boundary conditions (10.2). In particular, for this mode,

inviscid boundary conditions are assumed to be still satisfied on the inner sphere surface : viscous damping in the boundary layers is indeed weak as the spatial structure of this mode is simple. Thus, as it was the case for the sphere, it is here predicted that this mode is again the most unstable mode in the shell (at least in the considered range of parameters). The experiment of Seyed-Mahmoud *et al.* [109] and our own experimental observations presented in the next section will confirm this assumption. Moreover, as in Lacaze *et al.* [58], the inner shear layers induced by the boundary layer eruptions at the critical latitude [40] are expected not to significantly modify our results and will not be considered in the following.

The stability analysis of the spin-over mode is considered when an order ε deformation of the external boundary is imposed to the main flow defined by equation (10.1). The deformation, stationary and two-dimensional, has an azimuthal wavenumber equal to two. As already mentioned, the inner sphere remains spherical. Splitting the flow in three regions, an inviscid solution can thus be written in cylindrical coordinates as follows :

$$\mathbf{U} = U_r \mathbf{e}_r + U_\theta \mathbf{e}_\theta, \quad (10.3)$$

$$\left| \begin{array}{l} U_r = \varepsilon r \frac{R_{oH}(z)^4}{R_{oH}(z)^4 - R_{iH}(z)^4} (1 - R_{iH}(z)^4 r^{-4}) \cos(2\theta) \\ U_\theta = r - \varepsilon r \frac{R_{oH}(z)^4}{R_{oH}(z)^4 - R_{iH}(z)^4} (1 + R_{iH}(z)^4 r^{-4}) \sin(2\theta) \end{array} \right.$$

$$\text{for } -Ri < z < Ri,$$

$$\left| \begin{array}{l} U_r = \varepsilon r \cos(2\theta) \\ U_\theta = r - \varepsilon r \sin(2\theta) \end{array} \right. \quad \text{for } Ri < |z| < Ro.$$

In the two polar regions defined by $Ri < |z| < Ro$, this flow is equivalent to the main flow in a deformed rotating full sphere [58]. Elsewhere, $-Ri < z < Ri$, and contrary to the model used in Seyed-Mahmoud *et al.* [109], the inner sphere influences the main flow by inducing a potential flow of same order as the imposed deformation. This main flow defined by equation (10.3) is singular at the poles of the inner sphere but is regular and continuous elsewhere. Moreover, it satisfies the inviscid boundary condition of non penetration at both solid surfaces.

Iso-values of the azimuthal velocity U_θ in a meridional plane for $\eta = 1/3$ and $\eta = 3/5$ are presented in figure 10.1. When the shell is not deformed or in the case of a deformed full sphere, these iso-values are vertical lines in meridional planes. As can be seen, the addition of the inner sphere slightly modifies the flow principally in the vicinity of the core. This modification is due to the potential flow added in equation (10.3). We observe that the larger is the inner sphere the more the main flow structure is deformed.

The streamlines of the main flow in horizontal planes corresponding to $z = 0$ (equator), $z = 0.4$ and $z = 1$ are shown in figure 10.2. They illustrate

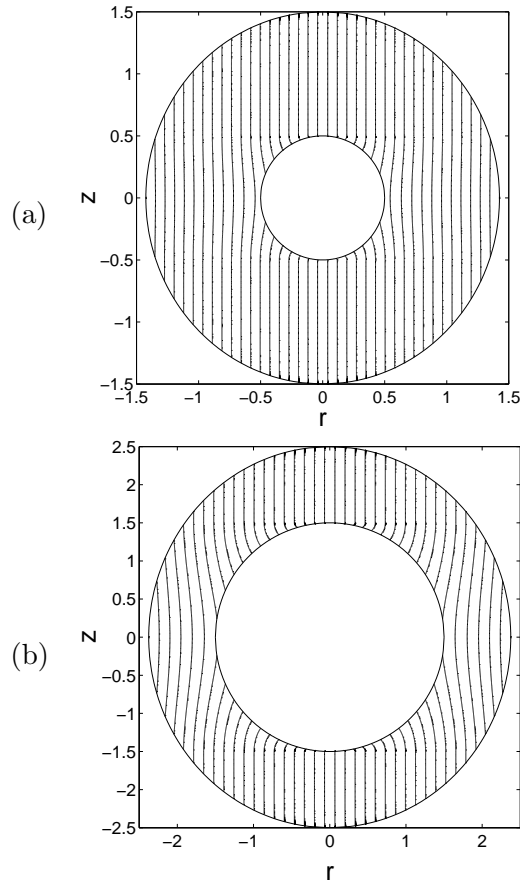


Figure 10.1: Iso values of azimuthal velocity for $\eta = 1/3$ (a) and $\eta = 3/5$ (b). In both cases $\varepsilon = 0.125$

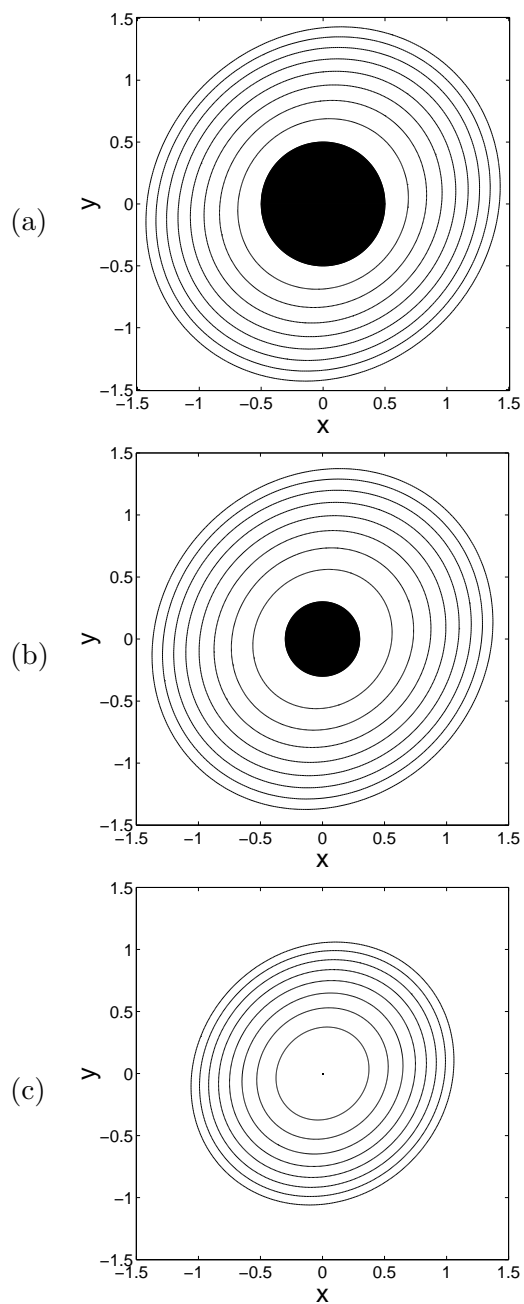


Figure 10.2: Streamline function at $z = 0$ (a), $z = 0.4$ (b), $z = 1$ (c)

the basic flow patterns in the equatorial and polar regions as defined before. The black disc represents a horizontal section of the inner sphere. In figure 10.2 a and b, it can be seen that the streamlines exhibit a different structure as that of figure 10.2c. For the two first cases, the elliptical streamline which defines the external boundary progressively becomes a circle close to the inner sphere contrary to the third figure where similarly to the case of the full sphere, the streamlines are concentric ellipses with the same eccentricity. As in the case of the full sphere [52] or the cylinder [81, 27], the order ε flow induced by the elliptical deformation can resonate with two Kelvin modes of the spherical shell if they satisfy the resonant condition : $\omega_2 = \omega_1$ and $m_2 = m_1 \pm 2$. ((ω_1, m_1) and (ω_2, m_2) are the frequencies and the azimuthal wave numbers associated with the two considered modes). The third condition specified by Kerswell [52] in the case of the full sphere, which corresponds to a spatial coherence between each modes in a meridional plane (or the equivalent in a cylinder : $k_1 = k_2$ where k_1 and k_2 are the axial wave numbers of the two modes), is not well defined here due to the unknown form of the mode basis. However, as indicated above, we are interested in the peculiar case of the resonance of the spin-over mode which corresponds to a combination of the two inertial waves characterized by $(m_1, m_2) = (-1, 1)$ and $(\omega_1, \omega_2) = (0, 0)$ with the basic elliptical flow. This resonance leads to an order ε exponential growth in time of the two symmetric modes, which can be written in cylindrical coordinates

$$\mathbf{u} = e^{\pm i\theta} \begin{vmatrix} \mp iz \\ z \\ \pm ir \end{vmatrix} + \text{C.C}$$

The derivation of the inviscid growth rate is classical and has already been done many times in different configurations [90, 120, 27, 58]. The method consists in applying a condition of solvability for the corrected flow at order ε . This condition of solvability is then solved by determining the adjoint modes which is in this case the mode itself corrected by a boundary condition term \mathcal{I} . The inviscid growth rate σ_{NV} is then determined by resolving the relation of dispersion at order ε . This leads to the general growth rate expression :

$$\sigma_{NV} = \frac{(\mathcal{N} - \mathcal{I})}{\mathcal{J}}, \quad (10.4)$$

where \mathcal{J} is the energy of the spin-over mode, \mathcal{I} is the surface boundary condition term and \mathcal{N} is the interaction of the spin-over mode with itself via the order ε correction of the main flow (10.3). The parameter η only enters equation (10.4) through the term \mathcal{N} for $-Ri < z < Ri$. All the other terms are equivalent to that of the full sphere case. We have calculated this inviscid growth rate σ_{NV} for the spin-over mode. It is plotted in figure 10.3 as a function of η . We note that for $\eta = 1/3$, which is our experimental configuration, the growth rate is not significantly different from the inviscid growth rate $\sigma_{NV} = 1/2$ of the full sphere case. The same remark was also formulated in Seyed-Mahmoud *et al.* [108] concerning the frequencies of the Kelvin waves in the sphere and in the $\eta = 1/3$ shell.

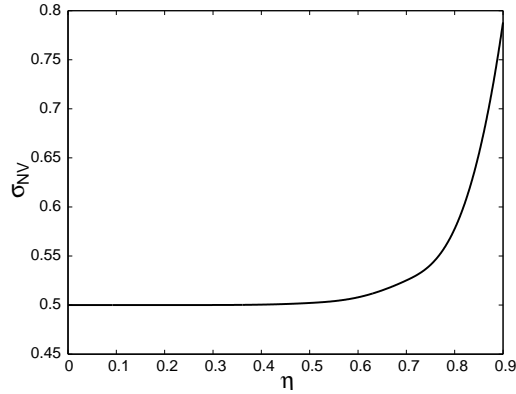


Figure 10.3: Evolution of the spin-over growth rate with η in the inviscid theory. For moderate η , no variation from the full sphere case is observed.

10.2.2 Viscous effect

In the previous section, the inviscid growth rate of the unstable spin-over mode has been determined. To allow further comparisons with the experimental results, we need to take into account the viscous dissipation terms (or at least the most significant ones). The ratio between the viscous forces and inertia is measured by the Ekman number $E = \frac{\nu}{\Omega d^2}$. The instability threshold should then be obtained as function of E and η . As mentioned above, the flow described by equation (10.3) satisfies inviscid boundary conditions but not the no slip condition (or viscous boundary condition) in the region defined by $-Ri < z < Ri$. This implies the existence of Ekman viscous boundary layers both on the inner and outer shells for $-Ri < z < Ri$. It has already been shown that the Ekman layers have a thickness of order $E^{1/2}$ [39] with an order ε correction flow that permits to satisfy the no slip condition. Therefore, when these Ekman layers are regular, the viscous correction to the flow implies an order $E^{1/2}$ damping and an order $\varepsilon E^{1/2}$ recirculation flow in the bulk. Thus, as in classical asymptotic theories, only the damping term is considered important in the linear analysis as other terms are asymptotically smaller. Moreover, note that the energy lost by viscous dissipation of the main flow is exactly balanced by the energy brought by the rotating container. That means in fact that the inviscid main flow is unaltered during the time scale of the instability growth. Consequently, we will only take into account the viscous correction enclosed in the Ekman layers in the calculation of the viscous growth rate.

Let us remark that spherical Ekman layers possess a singular behavior at the critical latitudes so that inner shear layers are spawned from these singular points and penetrate into the inviscid flow. We can also show that the viscous correction to the inviscid main flow (10.3) is also singular at the poles of the inner sphere. But as done in many linear studies, we will not consider here the dissipation associated with the regularization of these singularities as they are generally found to be weak [40]. However we should

mention that these effects could become important in highly non linear regimes at low Ekman number.

These different assumptions permit to give a prediction on the threshold of the elliptical instability. As shown by Hollerbach & Kerswell [40], the damping of the spin-over mode in a spherical shell is,

$$\sigma_V = 2.62 \frac{(1 + \eta^4)(1 - \eta)}{(1 - \eta^5)},$$

where 2.62 is the spin-over damping rate in the case of the full sphere and the supplementary function of η is the correction induced by the increase of dissipation in the inner sphere boundary layer. Thus, the estimation of the viscous growth rate close to the threshold reads,

$$\sigma = \varepsilon \sigma_{NV} - E^{1/2} \sigma_V.$$

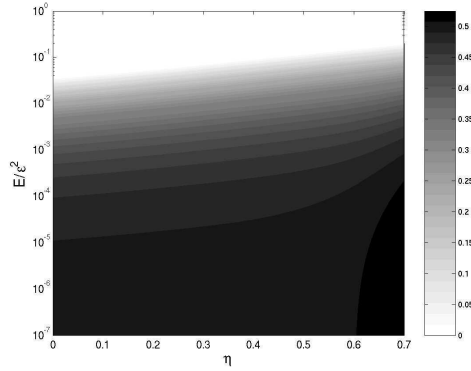


Figure 10.4: Viscous growth rate as function of the Ekman number and the geometrical parameter η .

Figure 10.4 shows the evolution of this spin-over mode viscous growth rate σ/ε in the (η, E) plane. For a given geometry, η and ε are prescribed and the evolution of σ as function of E is simply given by a vertical cut of figure 10.4. This kind of curves will be used for the forthcoming comparisons between theory and experiments.

10.3 Experimental results

10.3.1 Experimental techniques

The experimental device was already used by Lacaze *et al.* [58] (see figure 10.5). The only modifications in the experimental arrangement come from our desire to build a hollow shell this time. For this purpose, a ping pong ball has been open and a small solid ball introduced inside. This small sphere is rigidly mounted on a thin 0.2 mm in diameter nylon thread going through both spheres along their diameters. This thin wire will be used

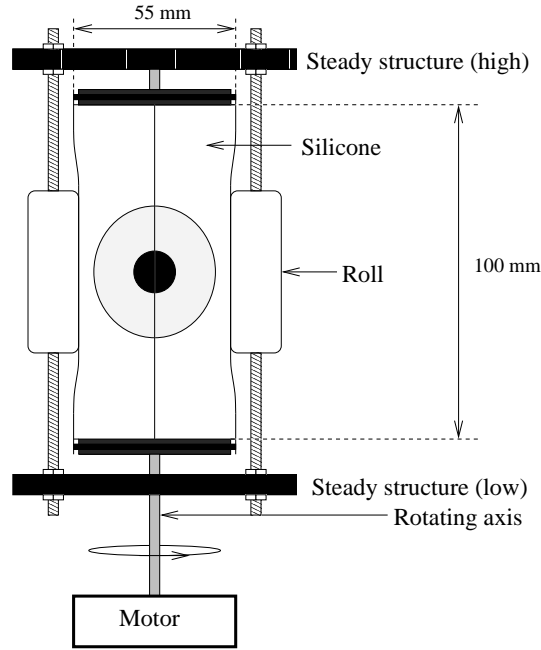


Figure 10.5: Experimental device with the hollow sphere molded in an elastic and transparent cylindrical bloc of silicone gel and containing the inner small sphere. The silicone cylinder is compressed by two rollers as it rotates around its axis.

later to position the inner ball in the middle of the hollow sphere. The ping pong ball is then closed back and polished to recover its perfect spherical shape. It is then inserted in a cylindrical block of liquid silicone that is cured at a temperature of 50° Celsius with the ping-pong ball inside. Finally, the ping-pong ball is dissolved by a solution of ethyl acetate and a hollow sphere molded in a transparent and deformable cylinder with a small core inside is obtained. The radii of the outer and inner sphere are respectively 21.75 mm and 7.5 mm . These values give a value of η approximatively equal to $1/3$ which is in accordance with the geophysical situation relative to Earth. The silicone cylinder is mounted on the vertical shaft of the device used in Lacaze *et al.* [58] and is compressed between two vertical rollers. The distance separating these rollers gives directly the elliptical deformation of the outer deformable sphere. Here, a value of $\varepsilon = 0.13$ is chosen. The study has been done in a range of angular velocity going from 0 rpm to 150 rpm so that the Ekman number varies from $3.14 \cdot 10^{-4}$ to ∞ .

The flow is visualized using a meridian laser plane illuminating the sphere that is filled with water seeded by kalliroscope flakes. The elongated shape of these reflective particles allows them to align in the flow and visualize the velocity field. In particular, the rotation axis of the flow is clearly visible as shown on figures 10.7 and 10.8. As the spin-over mode is mainly a solid body rotation around an axis perpendicular to the entrainment rotation axis, the combination of the main rotation with this mode leads to an axis inclined at an intermediate angle. In Lacaze *et al.* [58], the measurements of this angle in time permit the determination of the instability growth rate.

Unfortunately, here, because of the presence of the inner sphere, this simple technique was not accurate enough and flow velocities have been measured by laser Doppler anemometry. This system can measure two projections of the velocity field in the vertical and azimuthal directions. For this purpose, the fluid has been seeded with spherical particles of diameter $10\ \mu m$. The two measurement directions of the velocity field are shown on figure 10.6. The measurement location point in the middle of the fluid shell is chosen in the meridional plane aligned with the maximum stretching direction induced by the deformation (e.g. 45 degrees from this one). There, the flow can be written as

$$\mathbf{U} = V_\theta \mathbf{e}_\theta + V_z \mathbf{e}_z,$$

where $V_\theta = r$ is the flow velocity induced by the rotation and where $V_z = V_0 r e^{\varepsilon \sigma t}$ corresponds to the unstable spin-over mode amplitude where V_0 is the initial amplitude that gives rise to the instability. This is in fact not controlled in the experiment and simply comes from experimental fluctuations of the flow.

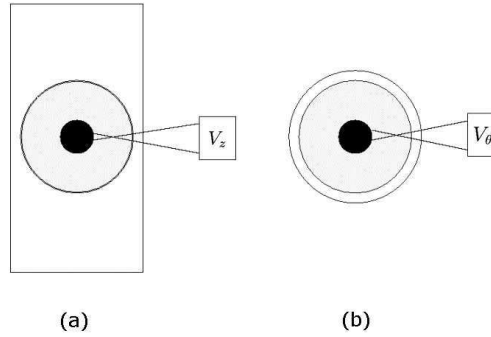


Figure 10.6: Laser Doppler anemometry arrangement. (a) side view, (b) top view.

10.3.2 Visualizations and measurements

Two snapshots of a typical evolution of the flow in our deformed spherical shell is presented in figures 10.7 and 10.8. The first figure presents an image of the flow during the spin-up transient. Inner cylindrical shear layers separating rotating fluid to steady fluid are particularly well visualized by the two vertical bright lines (intersection of a cylinder with the laser vertical plane) that propagate from the outer boundary towards the axis of rotation. After some minutes, this axis tilts as the flow gets unstable. As already mentioned, the flow is a combination of the main rotating flow around a vertical axis and the spin-over mode rotation whose axis is given by the stretching direction (at least for the considered range of Ekman numbers).

These two snapshots show the strong similarity between the full sphere case studied in Lacaze *et al.* [58] and the shell case. As already observed

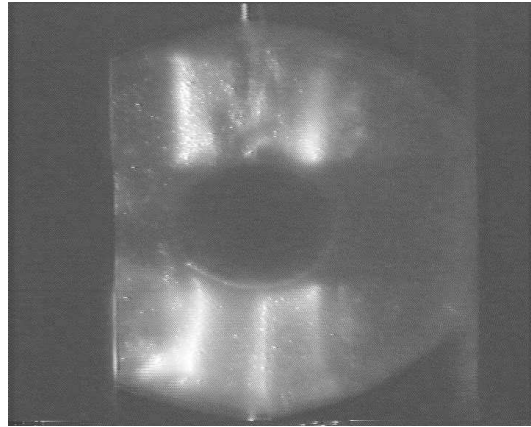


Figure 10.7: visualization of the spin-up phase after the start of the shell.

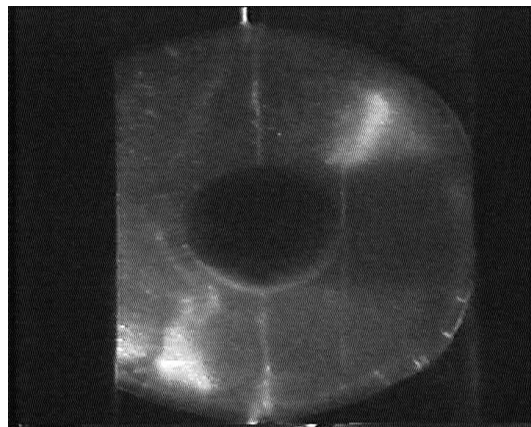


Figure 10.8: Visualization of the spin-over mode of the elliptical instability in a slightly deformed rotating shell. $E = 4.7 \cdot 10^{-4}$; $\eta = 1/3$; $\varepsilon = 0.13$.

by Seyed-Mahmoud *et al.* [109], the presence of the inner sphere does not strongly modify the structure of the unstable mode. To get a quantitative description of the instability, Laser Doppler anemometry time series are recorded and presented for $E = 4.7 \cdot 10^{-4}$ in figure 10.9. At $t = 0$, the device is set into rotation. As can be seen, the azimuthal velocity grows during the so called spin-up phase. The axial velocity which should remain null without any instability, exponentially grows till a saturated regime is reached. Later ($\Omega t = 700$), the motor is abruptly stopped and the spin-down phase is also recorded.

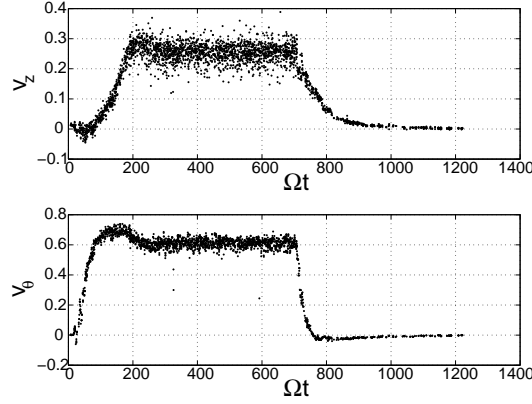


Figure 10.9: Velocity time series for $E = 4.7 \cdot 10^{-4}$; $\eta = 1/3$; $\varepsilon = 0.13$. The figures represents the time series of the vertical velocity (V_z) and of the azimuthal velocity (V_θ).

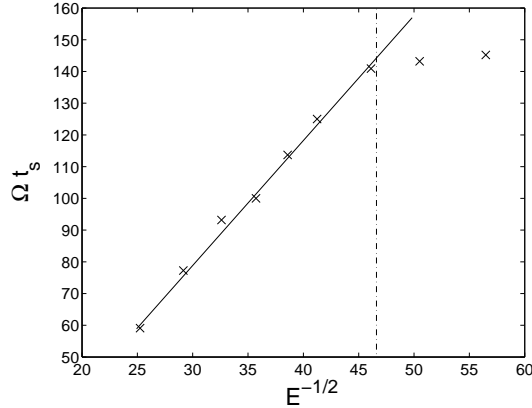


Figure 10.10: Spin up characteristic time as function of $E^{-1/2}$.

From the azimuthal velocity data, we can estimate the duration of the spin-up phase by determining the time when the maximum of the velocity is reached. This time which depends on the Ekman number, is plotted as a function of $E^{-1/2}$ in figure 10.10. This scaling has been proposed by Greenspan [39] and the straight line which fits the data points, confirms this $E^{-1/2}$ behavior. For the lowest values of the Ekman number (the highest rotation

rates) (approximately $E < 4.4 \cdot 10^{-4}$), a bending of the curve is observed and can in fact be explained by the apparition of the instability before the end of the spin-up. The non linear interaction between the main flow and the unstable mode generates in fact a negative vertical vorticity [49, 58] that invalidates our time estimation. In the same way, we will see in the following that the instability growth rate measurements are also affected by this interplay for the two smallest values of the Ekman number.

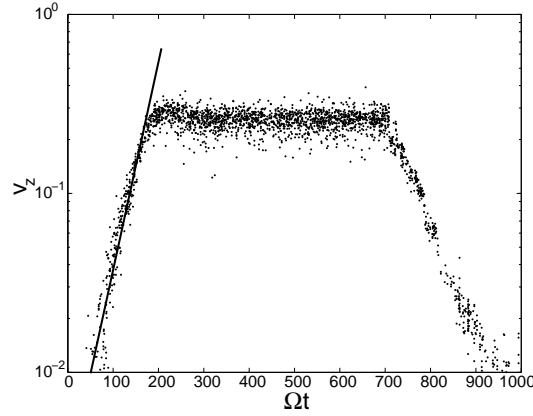


Figure 10.11: Time series of the vertical velocity for $E = 4.7 \cdot 10^{-4}$; $\eta = 1/3$; $\varepsilon = 0.13$.

Nevertheless, it is expected that for $E < 4.4 \cdot 10^{-4}$, a good estimation of the growth rate could be obtained from the anemometry time series. For this purpose, the axial velocity data are plotted in a semi-logarithmic graph (see figure 10.11). A linear fit of the data which corresponds to the exponential growth of the instability before its non linear saturation, is superimposed on the experimental measurements. The slope of this straight line gives a direct measure of the linear growth rate of the instability. A systematic measure of this exponential growth rate versus the inverse Ekman number is given in figure 10.12. In this figure, the experimental measurements are compared with the results calculated from the linear analysis described in the previous section. The theoretical curve corresponds to an ellipticity $\varepsilon = 0.125$ and ratio $\eta = 1/3$, and an excellent agreement between theory and experiment can be observed for most of the points. The error bars are estimated from the scatter in the slope measurements on the velocity time series. As expected and only for the largest Ekman numbers, the measure of the experimental growth rate deviates from the theory.

After the linear growth phase, the spin-over mode saturates and the flow is a steady tilted rotation which is visualized on figure 10.8. A slight overshoot which comes from the non linear interaction between the mode and the main rotation (at high amplitude, the unstable mode decreases the amplitude of the main rotation), is visible on the velocity time series. The asymptotic saturation amplitude of the instability is measured through the saturation of the vertical velocity at large time. It is represented on figure 10.13 and is compared to a theoretical analysis of the non linear model that was obtained

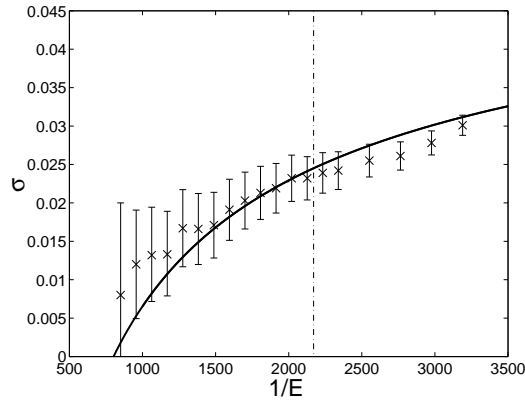


Figure 10.12: Comparison between measurements of the experimental growth rates and their theoretical predictions.

for the sphere [58]. This non linear model has been adapted to the shell case by the re-calculation of its parameters as presented in section 1. The simulation of this model leads, as it was the case for the full sphere, to a saturation of the spin-over mode. As already noted, the shell case for $\eta = 1/3$ and the hollow sphere are similar. It can be verified that the experiment and the theoretical analysis for the shell lead to comparable results which are presented in figure 10.13. The major effect of the presence of the inner core is to decrease the saturation amplitude of the mode. As in the experiments, the model exhibits an overshoot (solid line) that can be measured and compared (solid line) to the experimental points (x). In the same way, a good agreement is found between the asymptotic (large time) values obtained from the model (dotted line) and from the experiment (+).

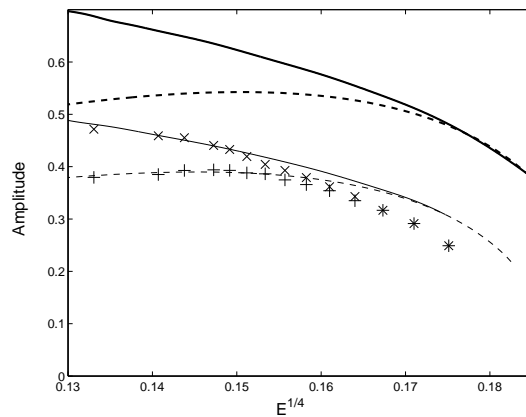


Figure 10.13: Asymptotic (dotted line) and overshoot maximum of amplitude (solid line)

from numerical simulation of the instability model. The heavy curves are computed for the full sphere case and the others for the $\eta = 1/3$ shell.

When the rotation of the outer sphere is suddenly stopped, the flow

velocity decreases because of viscous damping. As can be seen on Figure 10.11, an exponential decay is observed. The damping rate s of the axial velocity (generated by the spin-over mode) is plotted in figure 10.14 as a function of $E^{1/2}$. In accordance with the classical scaling of Ekman layers in rapidly rotating flow, the experimental values scaled on a straight line. Similarly, the basic flow rotation damping rate s_p can be measured by the decrease of the azimuthal velocity. Its behavior versus the Ekman number shows the same characteristic power law $\sim E^{1/2}$ (see figure 10.15). However, we observe that the azimuthal velocity decreases faster than the axial one. This means that the main flow is most rapidly damped than the unstable spin-over mode which is in fact still fed by the main flow even when this basic rotation is spinning down.

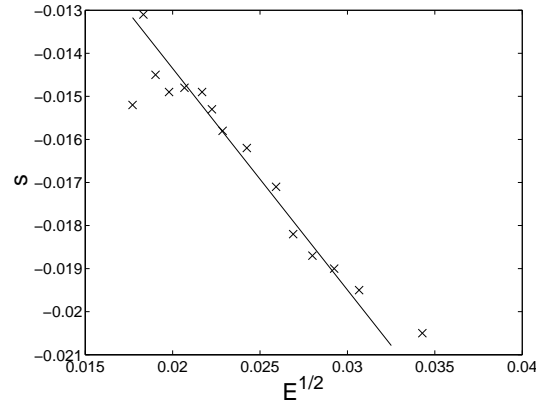


Figure 10.14: Damping rate of the spin-over mode, measured by the decreased of the vertical velocity.

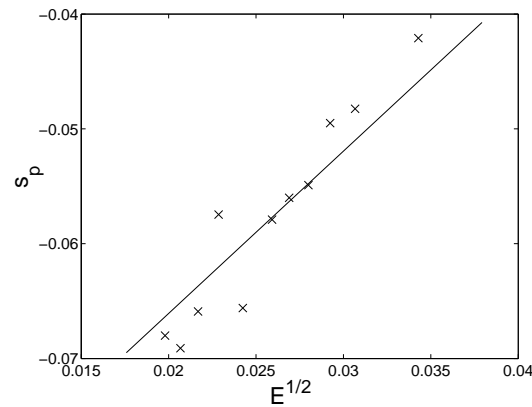


Figure 10.15: Damping rate of the main rotation measured by the decrease of azimuthal velocity.

Moreover, we note that, contrary to s_p , s is an increasing function of $E^{1/2}$. This means that the largest the initial rotation speed of the sphere is,

the more rapidly damped is the flow.

10.4 Conclusion

We have investigated in this article, the elliptical or tidal instability of a rotating fluid shell subjected to a stationary elliptic deformation. A model for the main flow has been first presented. Then its linear stability analysis has led to the determination of the growth rate of the spin-over mode of the rotating fluid shell as a function of the Ekman number. Visualization and anemometry measurements have illustrated the structure and the dynamics of this unstable mode. In particular, favorable comparisons between theory and experiments have been obtained in particular for the growth rate. The saturated non linear regime has been also described and it has been shown that there also, a good comparison has been obtained between the experiments and the non linear calculation of the spin-over mode saturated amplitude. Finally, we have described the flow spin down as the entrainment is abruptly stopped. Classical scaling of the characteristic damping rates have been recovered for both the main rotation and the spin-over mode.

Thus, a complete description of the most unstable elliptical instability mode in a shell has been presented. The shell geometry is reminiscent of geophysical situations where the outer liquid cores of planets are elliptically deformed by tidal excitations. On Earth, it is believed [53] that the growth rate generated by the elliptic deformation is not sufficient to compensate the damping rate associated with Joule dissipation. However, there exist other planets as Io where an elliptic instability could be possible and therefore play an important role in its core dynamics. Moreover, there probably exist exoplanets or other astrophysical binary systems in which such a dynamic might be possible.

11. CONCLUSION

11.1 Discussion

Dans cette partie, nous avons décrit dans un référentiel fixe la stabilité d'un écoulement dans une sphère en rotation et légèrement déformée de manière elliptique. Nous avons vu que dans le cas particulier de la géométrie sphérique, avec ou sans noyau solide, le mode dominant de l'instabilité induite par cette déformation est le mode de 'spin-over' qui provient du couplage de deux modes symétriques définis par une structure spatiale très simple (rotation solide). Dans les cas de la sphère et de la coquille sphérique, des études théoriques et expérimentales complémentaires ont été menées. Une analogie entre cette instabilité pour un fluide tournant non visqueux et la rotation d'un ellipsoïde solide autour de son axe médian a également été soulignée. Quant à la dynamique visqueuse et non linéaire de cet écoulement dont certaines observations ont été faites, elle reste encore un sujet ouvert pour lequel de nombreuses questions sont encore posées.

Il semble important de mentionner que la déformation des planètes dues aux champs de gravitation d'astres proches est certainement plus complexe que la déformation elliptique que nous avons présentées. En particulier, les mouvements de convections qui existent dans le manteau sur des échelles de temps très longues [65] peuvent également modifier la structure de l'interface noyau-manteau. Dans le cas de systèmes non binaires, *i.e.* pour lesquels trois astres ou plus sont en rotation les uns par rapport aux autres (par exemple les satellites Joviens), les déformations engendrées par les champs de gravitation peuvent être plus complexes. Notamment une analyse d'instabilité multipolaire (voir Eloy & Le Dizès [25] et Eloy *et al.* [27]) peut être envisagée. Il est également à noter que les effets de marée ne sont pas stationnaires. Par exemple, la déformation de Io est induit par le champ de gravitation de Jupiter. Or, la vitesse de rotation de Io est égale à sa vitesse de rotation autour de Jupiter. Dans ce cas, le différentiel de rotation entre le cœur liquide et le champ de déformation est générée par la présence des autres satellites Joviens qui modifient la trajectoire orbitale de Io de manière périodique [50]. Ces différents phénomènes peuvent alors exciter d'autres ondes inertielles dans le fluide en rotation. Il pourrait alors être intéressant de pouvoir forcer différentes ondes par une déformation plus complexe de la sphère en rotation. La figure 11.1 présente une observation d'un fluide contenu dans une sphère en rotation et contraint par un champ d'étirement tripolaire. Cette observation est obtenue avec le même dispositif expérimental que celui utilisé précédemment mais trois rouleaux disposés en

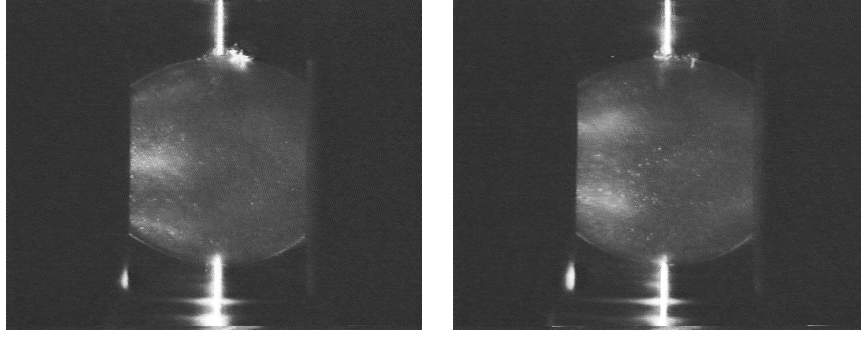


Figure 11.1: Visualisation de l'écoulement dans une sphère déformée par trois rouleaux ($E = 6.3 \cdot 10^{-4}$).

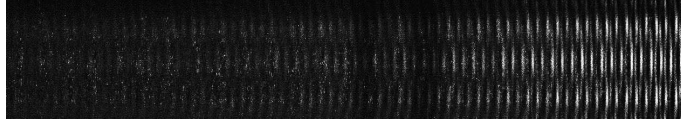


Figure 11.2: Diagramme espace-temps développé le long d'une ligne vidéo verticale ($E = 6.3 \cdot 10^{-4}$).

triangle sont utilisés pour modifier la déformation de la sphère. Dans ce cas, la résonance de deux modes avec le champ de déformation est possible si les deux nombres d'ondes azimutales vérifient $m_2 - m_1 = 3$ comme explicité par Le Dizès & Eloy [67] et Eloy & Le Dizès [25]. On observe sur la figure 11.1 un structure qui oscille dans le temps. En effet, les zones lumineuses et d'ombres horizontales dans la partie méridionale gauche de la sphère s'inverse entre les deux figures. Le diagramme espace-temps présenté sur la figure 11.3 permet de déterminer la fréquence caractéristique du mode instable pour une telle configuration (figure 11.3). La fréquence obtenue est $\omega = 0.39\Omega$. Ce résultat serait proche de la valeur estimée par l'approche locale [67] : $\omega = \Omega(m_1 + m_2)/2$ si $(m_1, m_2) = (-1, 2)$.

Nous nous sommes proposés d'obtenir une estimation du taux de croissance de cette instabilité en analysant les niveaux de gris du signal (figure 11.2). Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 11.4. Sur la figure 11.4 (a) est présenté le signal correspondant au niveau de gris du diagramme espace-temps alors que sur la figure 11.4 (b) est présentée, en échelle semi-logarithmique, la transformée de Hilbert de ce signal autour de la fréquence du mode instable. Le paramètre de déformation ε est estimé dans notre expérience à 0.11 (voir [23]). Ainsi, nous obtenons, $\sigma/\varepsilon = 0.427$. Ce résultat est en accord avec les ordres de grandeurs des taux de croissance dans les cas de l'instabilité elliptique dans une sphère et de l'instabilité tripolaire dans un cylindre. Le véritable taux de croissance serait peut-être en fait légèrement inférieur à ces valeurs, ce qui serait cohérent avec le terme de detuning explicité pour les résonances de modes dans une sphère [58]. Nous pouvons, en effet, rappeler que dans une sphère, seul le mode de spin-over est une résonance parfaite de deux ondes de Kelvin (ce couplage ne pouvant

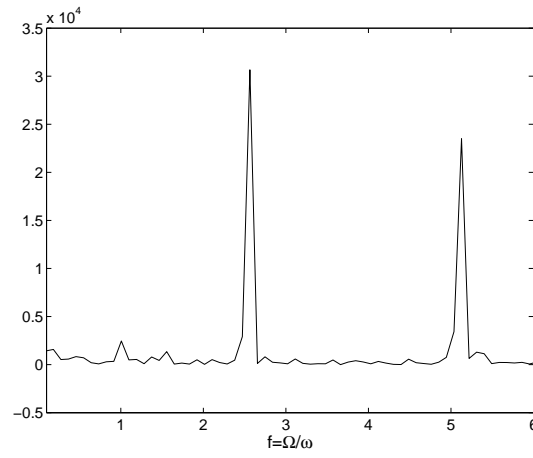


Figure 11.3: Spectre de l'instabilité triangulaire dans une sphère en rotation ($E = 6.3 \cdot 10^{-4}$).

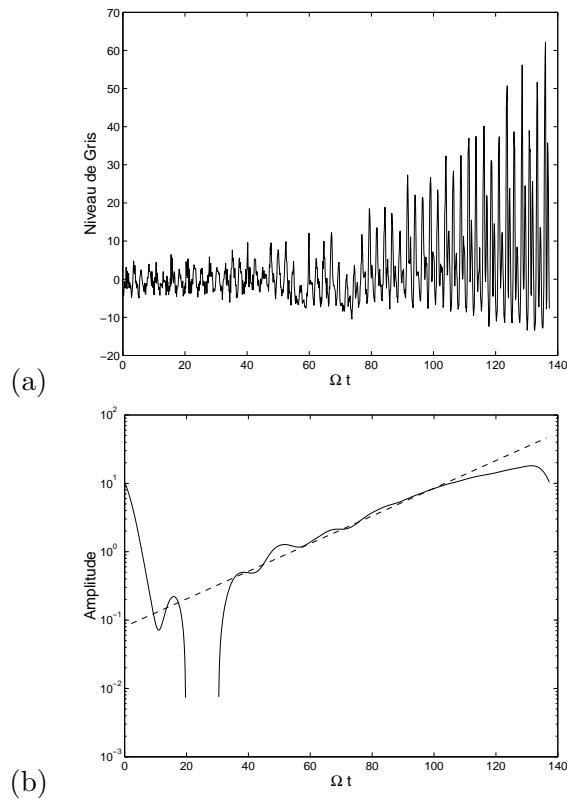


Figure 11.4: (a) Niveau de gris correspondant au diagramme espace-temps 11.2. (b) amplitude du signal (a) obtenue par transformée de Hilbert autour de la fréquence $\omega = 0.39\Omega$ en échelle semi-logarithmique.

être obtenu que par une déformation elliptique).

11.2 Perspectives

Deux aspects fondamentaux sur la suite à donner à cette étude sont à souligner.

- Les solutions linéaires et faiblement non linéaires proches du seuil d'instabilité sont relativement simples (*Cf.* chapitre 8 en particulier). En revanche, une dynamique non linéaire plus complexe pour certaines gammes des paramètres existe. Cette dynamique peut être caractérisée par une intermittence entre le mode dominant et des structures plus complexes. Une étude plus approfondie est à envisager.

- Les études de Brito *et al.* [13] et Odier *et al.* [94] ont mis en évidence qu'un champ magnétique transverse à l'écoulement d'un fluide conducteur induit une composante de champ magnétique perpendiculaire au champ principal et à l'axe de rotation du fluide. Si l'on reconsidère l'écoulement dans la sphère maintenant superposé à un champ magnétique aligné avec l'axe de rotation (direction nord-sud), la croissance du mode de 'spin-over' due à l'instabilité elliptique et donc la variation de la direction de l'axe de rotation pourrait être propice à l'induction d'un champ magnétique. Cette dernière hypothèse semble, de plus, attrayante pour la compréhension du comportement du champ magnétique autour de Io [50].

11.2.1 Dynamique non linéaire : chaos ?

L'étude des interactions non linéaires de modes propres à un écoulement fluide est fondamentale pour pouvoir expliquer les instabilités secondaires de l'écoulement et envisager un scénario de transition vers la turbulence [18]. L'observation des petites structures de l'écoulement dans une sphère en rotation et déformée (voir chapitre 8) est un exemple où ces interactions ont été mises en évidence. Une instabilité secondaire correspondant à une pulsation d'onde le long du vortex a d'ailleurs été observée. L'étude de ces interactions pour l'instabilité elliptique semble, d'un point de vue hydrodynamique, être la prochaine étape pour une meilleure compréhension de la transition [27, 58].

Pour cela, la première étape est sans doute de s'intéresser à la géométrie cylindrique [27]. Dans ce cas, on s'acquitte, en effet, du problème de la singularité de couche limite présente en géométrie sphérique [39] qui peut avoir un rôle important dans la dynamique non linéaire de l'écoulement. De plus, dans le cas d'un cylindre elliptique, un régime d'intermittence entre rotation solide, instabilité linéaire et turbulence a été mis en évidence [27]. Cette intermittence est plus visible et plus marqué que dans la géométrie sphérique. Un exemple de visualisation d'un tel cycle d'intermittence est montrée sur la figure 11.5.

La relaminarisation de l'écoulement est certainement due à l'effet stabilisant d'une rotation. En effet, un écoulement turbulent ne peut être entretenu que par la présence d'un forçage continu. Un scénario probable de

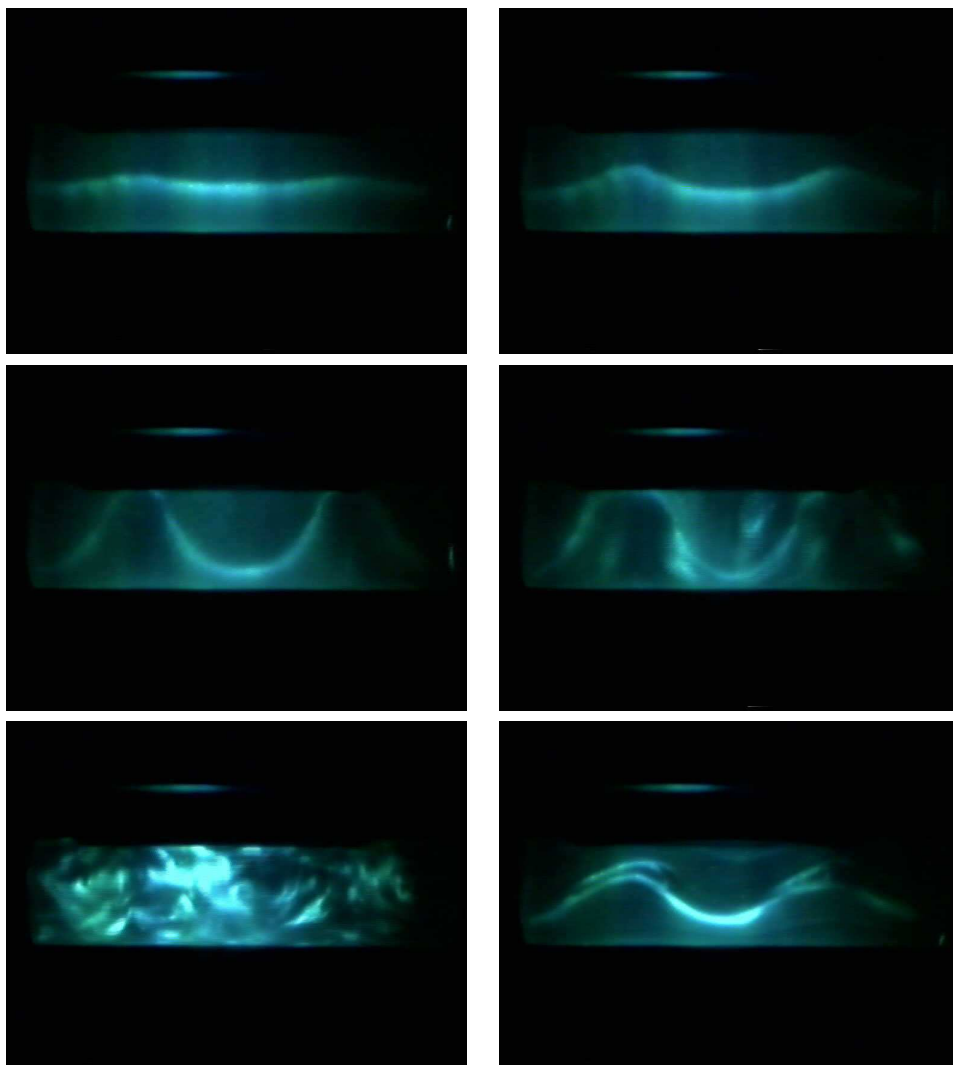


Figure 11.5: Cycle d'intermittence d'un fluide en rotation dans un cylindre faiblement elliptique.

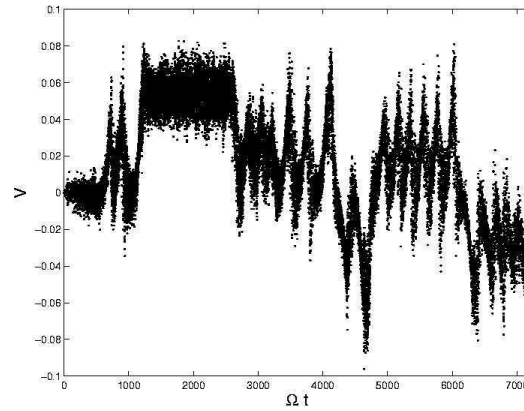


Figure 11.6: Mesure de vitesse mettant en évidence l'intermittence de l'écoulement soumis à l'instabilité elliptique dans un cylindre.

la relaminarisation serait donc que, la déformation du cylindre étant très faible, les petites échelles de la turbulence ne subisse que la rotation solide de l'écoulement principal et non pas le forçage. Ainsi, les petites échelles dissipent et l'écoulement se laminarise.

Une mesure par anémométrie laser à effet Doppler de la composante radiale de la vitesse est présentée figure 11.6.

Sur cette figure un cycle instabilité-explosion-relaminarisation est caractérisé par une échelle de temps d'environ $\Omega t = 100$. On constate également pour $4000 < \Omega t < 5000$, un inversion de phase du mode instable. Cette inversion correspond à un décalage de phase de π . Cette inversion n'est possible que si il existe une relaminarisation totale de l'écoulement. Pour $1200 < \Omega t < 2700$, le signal est "bruité" autour d'une valeur qui semble être constante. L'observation de l'écoulement dans cette zone montre qu'il s'agit d'une phase d'intermittence entre le mode instable principal qui semble être saturé et des structures plus complexes. Cette dynamique est similaire à l'observation de l'écoulement dans une sphère déformée (chapitre 4). Cette zone pourrait être représentative d'une dynamique de couplage d'ondes non linéaires. Une analyse plus approfondie de cette dynamique avec, sans doute, une mise au point nécessaire d'un outil de mesure adapté pourrait permettre l'initiation d'un scénario de transition vers la turbulence.

11.2.2 Champ magnétique induit

L'intérêt de l'étude de la stabilité des écoulements d'un fluide dans une sphère en rotation rapide est, comme nous l'avons souligné dans cette partie, de mieux comprendre la dynamique des fluides conducteurs présents dans le cœur de nombreux astres dont notre planète. Nous avons également mentionné qu'il existe un lien entre ces écoulements et la présence de champs magnétiques. Outre le sujet fondamental et encore mal compris de champ magnétique auto-induit, cette dynamique pourrait modifier l'orientation ou la structure d'un champ magnétique existant. Notamment, Kerswell & Malkus [50] se sont intéressés au rapport qu'il existe entre la dynamique du cœur

liquide de Io et les lignes de champ magnétique observées autour de ce satellite par la sonde Galiléo. Il est encore difficile de certifier que Io possède son propre champ magnétique mais il semble maintenant admis que les lignes de champ provenant du champ magnétique propre à Jupiter seraient perturbées par la présence du satellite. Ce phénomène pourrait alors être initié par l'induction d'un champ magnétique secondaire lié à la présence d'un champ magnétique externe et à la dynamique d'un fluide conducteur. Kerswell & Malkus [50] ont rattaché ce phénomène à l'instabilité elliptique. Il a été effectivement observé que Io subit des forces de marée induite par la présence de Jupiter et des autres satellites de Jupiter pouvant déformer sa surface jusqu'à quelques kilomètres. L'écoulement du noyau liquide pourrait alors être modélisé par l'étude que nous avons menée avec un facteur d'ellipticité $\varepsilon = 0.004$.

Comment l'instabilité elliptique pourrait-elle induire un champ magnétique par la présence d'un champ externe? Une modélisation simple peut être développée dans le cas d'une instabilité saturée (*Cf.* chapitres 8 et 10). Dans ce cas l'écoulement proche du cœur est une rotation solide dont l'axe de rotation Ω n'est pas aligné avec l'axe de rotation de la sphère z . Supposons, de plus, qu'il existe un champ magnétique externe dont les lignes de champ sont alignés avec l'axe de rotation et défini par un vecteur \mathbf{B} . Une solution des équations de Maxwell linéarisées autour de cet état de base hydrodynamique et magnétique correspond à l'induction d'un champ magnétique défini par un vecteur \mathbf{b} perpendiculaire au plan défini par les vecteurs \mathbf{B} et Ω . L'intensité du champ \mathbf{b} dépend alors du champ magnétique externe \mathbf{B} et de la composante de Ω perpendiculaire à z et dans le plan défini par z et Ω [13, 94].

Une expérience réalisée dans le but de valider et de caractériser ce phénomène de champ magnétique induit vient d'être mise en place. Une photographie du dispositif expérimental (figure 11.7) met en évidence les deux sondes utilisées pour détecter deux composantes d'un champ magnétique. La première sonde est placée dans le champ externe (direction verticale) induit par les deux bobines de Helmholtz (figure 11.7) tandis que la deuxième mesure un éventuel champ induit dans le plan horizontale.

Ainsi, comme on peut le constater, l'étude de l'instabilité elliptique en géométrie sphérique mais aussi en géométrie cylindrique semble à la vue de ce qui précède un sujet encore ouvert aussi bien d'un point de vue expérimentale que théorique. L'analyse linéaire du champ magnétique et les extensions non linéaires avec ou sans champ seraient indéniablement des perspectives intéressantes.

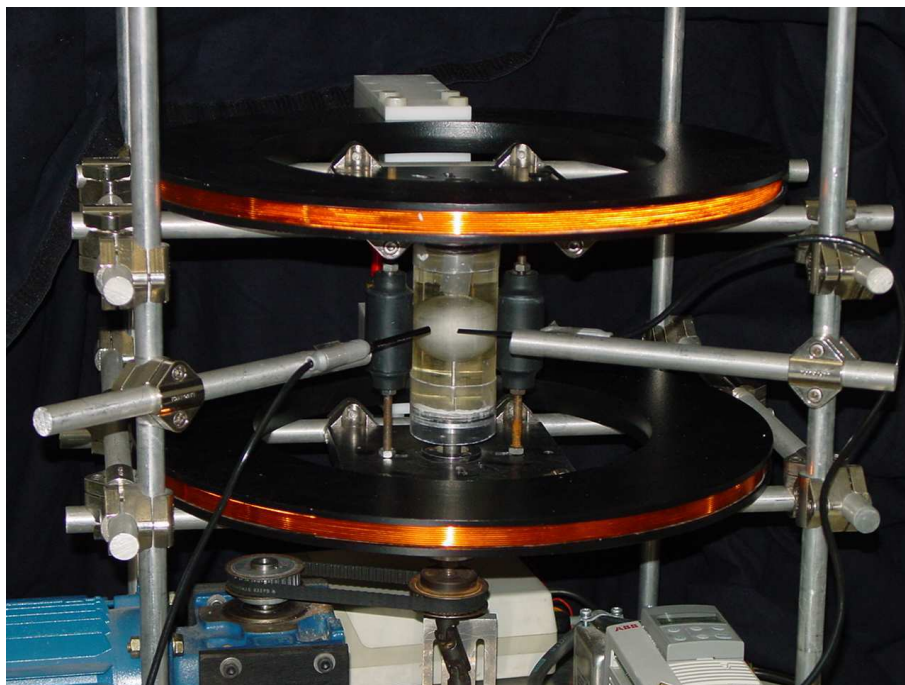


Figure 11.7: Dispositif expérimental présentant la sphère de métal liquide, les bobines d'induction magnétique et les sondes.

ANNEXE

A. DESCRIPTION ASYMPTOTIQUE DES MODES DE KELVIN D'UN TOURBILLON

Cette annexe correspond à un article en révision au Journal of Fluid Mechanics : Le Dizès S. and Lacaze L. "An asymptotic description of vortex Kelvin modes" [69]

Abstract

A large-axial-wavenumber asymptotic analysis of inviscid normal modes in an axisymmetric vortex with a weak axial flow is performed in this work. Using a WKBJ approach, general conditions for the existence of regular neutral modes are obtained. Dispersion relations are derived for neutral modes confined in the vortex core ("core modes") or in a ring ("ring modes"). Results are applied to a vortex with Gaussian vorticity and axial velocity profiles, and a good agreement with numerical results is observed for almost all values of k . The theory is also extended to deal with singular modes possessing a critical point singularity. Known damped normal modes for the Gaussian vortex without axial flow are obtained. The theory is also shown to provide explanations for a few of their peculiar properties.

A.1 Introduction

Kelvin modes are the inviscid normal modes which are associated with the rotation of the fluid in a stable vortex. They often describe the possible small deformations of the vortex. They are also known to be resonantly excited in various situations (elliptic instability; precessional instability; parametric forcing). The goal of this work is to construct an asymptotic theory which provides the spatial structure and the dispersion relation of these modes.

The simplest Kelvin modes are for an infinite uniform solid body rotation. In that case, there exist plane wave solutions in the rotating frame (the so-called Kelvin waves) which can be summed to form a localized inviscid normal mode [39]. If the solid body rotation is within a finite cylindrical region, the frequency ω of the modes is discretized for any fixed axial wavenumber k and azimuthal wavenumber m and satisfy a dispersion relation. Moreover, in that case, Kelvin modes form a basis, so all the deformations can be expressed in terms of Kelvin modes. If the solid body rotation is limited by an irrotational fluid (Rankine vortex), the Kelvin modes satisfy

similar properties (e.g. [107]). They also form a basis for the perturbations confined within the vortex core [4].

Kelvin modes are also known to exist, when the vorticity field is not constant. Some of their properties were analyzed for a Gaussian vortex without axial flow in Sipp & Jacquin [112], Fabre [28] and Fabre *et al.* [30]. Sipp & Jacquin [112] used an inviscid approach. They showed that regular inviscid normal modes exist in a frequency interval similar to the one obtained for the Rankine vortex; however, the interval where ω/m is in the range of the angular velocity, has to be excluded. In that frequency interval, regular inviscid normal modes do not exist anymore: they possess a critical point singularity. If this singularity is smoothed by viscosity, these modes apparently become damped with a damping rate which is largely independent of viscosity (if sufficiently small) as shown by Fabre [28] and Fabre *et al.* [30]. An inviscid estimate of this damping rate can be obtained by avoiding the singularity in the complex plane as done by Sipp & Jacquin [112]. Such a procedure has been justified in Le Dizès [66] where the viscous critical layer has been resolved. In the present work, we implicitly assume a viscous problem with vanishing viscosity. This implies that, for a few modes, the path of integration of the inviscid equation has to be deformed in the complex plane, for the equation to remain asymptotically valid. In practice, this means that the critical point singularities have to be avoided in the complex plane, following the classical rule used for 2D modes in planar flows (see [79]).

When an axial flow is present, regular inviscid neutral modes are still expected to exist, however very little information on their properties is available in the literature. Moreover, axial flow may promote instability in a stable vortex. For instance, the Batchelor vortex, which is a vortex with Gaussian vorticity and axial velocity profiles, is known to possess unstable inviscid modes if the axial flow is sufficiently large (see, for instance [6]). Here, our interest is not in these modes. Instead, we shall focus on vortices which are stable in a non-viscous framework. Our goal is to provide some information on the neutral and damped modes of such vortices in a general setting using an asymptotic approach.

The approach is based on a large-axial-wavenumber asymptotic analysis. In this limit, the radial structure of the normal modes varies on a faster scale than the characteristic radial scale of the base flow. These fast variations can be captured by a WKB theory (see, for instance [10]) and are shown to depend in a simple way on the base flow characteristics. For neutral modes, they are also shown to be either pure oscillations or pure exponentials, the transition between the two types of behaviors occurring at the turning points where WKB approximations break down. As with the original Quantum mechanics framework, eigenmodes are constructed by forming solutions which are localized in the oscillatory regions; the dispersion relation being nothing but a discretization of the number of oscillations.

In the present work, two types of modes are considered: modes confined between the vortex center and a turning point (“core modes”) and modes confined between two distant turning points (“ring modes”). The paper is organized as follows. In section A.2, base flow and perturbation equations

are presented. Section A.3 is devoted to the large wavenumber asymptotic analysis in a general setting. Conditions for the existence of regular neutral modes in the WKBJ framework are derived. The spatial structure and the dispersion relation of core modes and ring modes are then obtained. The results are applied to a Gaussian vortex with or without axial velocity in section A.4. The case without axial flow is considered first in section A.4.1. In this section, the results for core modes are also extended to deal with a critical layer singularity. Both singular neutral core modes and damped core modes are obtained and compared to numerical results. In section A.4.2, the asymptotic results are applied to the Gaussian vortex with axial flow (Batchelor vortex). The last section summarizes the main results and discusses a possible application of the results to the elliptic instability.

A.2 Basic flow and perturbation equations

Consider a general axisymmetric vortex with axial flow, whose velocity field may be written in cylindrical coordinates in the form :

$$\mathbf{U}_b(r) = (0, V(r), W(r)) . \quad (\text{A.1})$$

This vortex has an angular velocity $\Omega(r)$ and an axial vorticity $\zeta(r)$ given by :

$$\Omega(r) = \frac{V(r)}{r} , \quad (\text{A.2})$$

$$\zeta(r) = \frac{1}{r} \frac{d(rV)}{dr} . \quad (\text{A.3})$$

In this study, viscous diffusion is not taken into account with the implicit assumption that the Reynolds number is sufficiently large. The base flow, defined by (A.1), satisfies the incompressible Euler equations regardless of the profile V and W , as long as it represents a regular field in cylindrical coordinates (in particular $V(0) = 0$). The asymptotic analysis detailed in the next section will be carried out for arbitrary profiles. However, in the applications, we shall only consider Gaussian vorticity and axial velocity profiles. Time and spatial scales are non-dimensionalized by the angular velocity in the vortex center, and the core size, respectively ; such that $\Omega(r)$ and $W(r)$ read :

$$\Omega(r) = \frac{1 - e^{-r^2}}{r^2} , \quad (\text{A.4})$$

$$W(r) = W_0 e^{-r^2} , \quad (\text{A.5})$$

where W_0 is a constant measuring the strength of the axial flow.

We shall be concerned with inviscid linear perturbations in the form of normal modes :

$$(\mathbf{U}, P) = (u, v, w, p) e^{ikz + im\theta - i\omega t} , \quad (\text{A.6})$$

where k and m are axial and azimuthal wavenumbers and ω is the frequency. The equations for the velocity and pressure amplitudes (u, v, w, p) are :

$$i\Phi u - 2\Omega v = -\frac{dp}{dr} \quad (\text{A.7})$$

$$i\Phi v + \zeta u = -\frac{imp}{r} \quad (\text{A.8})$$

$$i\Phi w + W'w = -ikp \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} + \frac{imv}{r} + ikw = 0, \quad (\text{A.10})$$

where a prime denotes a derivative with respect to r , and

$$\Phi(r) = -\omega + m\Omega(r) + kW(r). \quad (\text{A.11})$$

Equations (A.10a-d) can be reduced to a single equation for the pressure p (see [107, 66]) to form :

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\Delta'}{\Delta} \right) \frac{dp}{dr} + \left(\frac{2m}{r\Phi\Delta} (\Omega'\Delta - \Omega\Delta') + \frac{k^2\Delta}{\Phi^2} - \frac{m^2}{r^2} - \frac{2mkW'\Omega}{r\Phi^2} \right) p = 0, \quad (\text{A.12})$$

where

$$\Delta(r) = 2\zeta(r)\Omega(r) - \Phi^2(r). \quad (\text{A.13})$$

If Δ and Φ do not vanish at zero, the condition that p remains bounded at ∞ and at $r = 0$ transforms equation (A.12) into an eigenvalue problem for ω (assuming k and m are fixed). The case where $\Phi(0)$ is close to zero will not be considered here. It requires a specific study by itself. We refer to Fabre [28] for the Gaussian vortex without axial flow. Partial results for the Batchelor vortex can also be found in Stewartson & Leibovich [115] and Stewartson & Brown [114].

The objective of this work is to provide information on the dispersion relation and on the spatial structure of the eigenmode. Our approach is based on an asymptotic analysis for large k .

A.3 Large k asymptotic analysis

In this section, the asymptotic analysis is presented in a general framework. Applications are considered in the next section.

The principle of the analysis is to construct approximate solutions valid in the limit $k \rightarrow \infty$. For large k , when there is no axial flow, or if the axial flow scales as $1/k$, the expression before p in equation (A.12) becomes particularly simple as it reduces to a single term $k^2\Delta/\Phi^2$. Therefore, for large k , this term has to be equilibrated by rapid variation of the pressure amplitude on the scale rk . Such variations can be captured by a WKBJ analysis (see [10]). In this framework, the perturbation pressure is expanded as

$$p = \left(p_0(r) + \frac{p_1(r)}{k} + \dots \right) e^{k\phi(r)}. \quad (\text{A.14})$$

The expression for $\phi(r)$ is obtained at the order k^2 :

$$\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 = -\frac{\Delta}{\Phi^2} , \quad (\text{A.15})$$

where we have assumed in the expression (A.11) for Φ that the axial flow is small and can be written as

$$kW \equiv W_1 = O(1) . \quad (\text{A.16})$$

From equation (A.15), it follows that :

$$\phi(r) = \pm i \int^r \frac{\sqrt{\Delta}}{\Phi} dr . \quad (\text{A.17})$$

At the order k , an equation for $p_0(r)$ is obtained :

$$2\phi' \frac{dp_0}{dr} + \left[\phi' \left(\frac{1}{r} - \frac{\Delta'}{\Delta} \right) + \phi'' \right] p_0 = 0 , \quad (\text{A.18})$$

which gives, for both functions ϕ ,

$$p_0(r) = \sqrt{\frac{\Phi}{r}} \Delta^{1/4} . \quad (\text{A.19})$$

Expressions (A.14), (A.17) and (A.19) provide two independent leading order approximations of solutions to (A.12). These so-called WKBJ approximations break down at the vortex center $r = 0$, and at the points where Φ or Δ vanishes. The vortex center is a regular singularity which comes from the use of cylindrical coordinates. As shown below, this singularity can be easily smoothed by carrying out a local analysis for $r = O(1/k)$. Points where $\Delta = 0$ are the so-called turning points of the WKBJ approximations. In the neighborhood of these turning points, the two approximations are no longer independent. One can also show that higher order corrections, such as p_1 in the expansion (A.14), diverge at turning points. These turning point singularities can also be resolved by a local analysis of the turning point region ([10], see also below). Finally, the singularities where $\Phi = 0$, i. e. $\omega = m\Omega + W_1$, are the so-called critical points of the inviscid approximation. As our choice is to stay inviscid, we shall not resolve these singularities here. Instead, if such a singularity appears, it will be avoided by deforming the integration space of equation (A.12) in the complex r -plane, in order to stay in the regions of the complex plane where the inviscid approximation remains valid [112, 66]. In those cases, the inviscid solutions would become singular in the physical domain.

If we restrict for a moment our attention to regular neutral eigenmodes, a few results can be obtained in a general setting. By definition, for those modes, both the frequency ω and the wavenumber k are real and $\Phi(r)$ never vanishes on the real axis. The WKBJ approximations constructed for the present problem are then very similar to those initially introduced by Wentzel, Kramers and Brillouin for describing the bounded states of a particle in a potential well in Quantum Mechanics (see [61]). If $\Delta > 0$, WKBJ

approximations are oscillating functions, if $\Delta < 0$, they are exponentials. In the semi-classical description of Quantum Mechanics, this corresponds to oscillating wave functions in regions where the energy level is larger than the local potential and evanescent exponentials where it is smaller. As in this framework where it is proved that there is no energy level smaller than the potential minimum, one can prove here that there does not exist regular neutral eigenmode for which Δ remains positive for all r . Indeed if $\Delta > 0$ for all r , both WKBJ approximations are uniformly valid in any interval of $]0, +\infty[$, and no combination of these approximations can be matched to solutions which are bounded at the origin and at infinity (see also below). The conclusion is therefore that Δ must be non-negative somewhere for a regular neutral mode to exist. To analyse this condition of existence, it is useful to define what is often called the epicyclic frequencies $\omega^\pm(r)$ of the vortex at the radial coordinate r :

$$\omega^\pm = m\Omega(r) + W_1(r) \pm \sqrt{2\Omega(r)\zeta(r)} . \quad (\text{A.20})$$

In this expression, the quantity $\Upsilon(r) = 2\Omega(r)\zeta(r)$ is what is called the Rayleigh discriminant. It characterizes the unstable character of the vortex with respect to the centrifugal instability (see [21]). In the stable vortex we consider, Υ is always non-negative which implies that ω^+ and ω^- are real functions. These two functions provide the frequency interval where Δ is positive, that is $\Delta(r) > 0$ if and only if $\omega^-(r) < \omega < \omega^+(r)$. It is also useful to consider the function

$$\omega_c(r) = m\Omega(r) + W_1(r) , \quad (\text{A.21})$$

which provides the (critical) frequency of the mode that exhibits a critical point at the radial location r . One can now easily deduce the frequency intervals where regular neutral modes can exist. Their frequency must be somewhere between ω^- and ω^+ without being in the range of ω_c . The regular neutral mode frequencies then satisfy

$$\min(\omega^-) \leq \omega \leq \min(\omega_c) , \quad (\text{A.22})$$

or

$$\max(\omega_c) \leq \omega \leq \max(\omega^+) . \quad (\text{A.23})$$

Moreover, the upper bound in (A.22) and the lower bound in (A.23) can be excluded if the extrema are reached for finite r .

In the Quantum Mechanics framework, bounded states are known to be discretized by their number of oscillations in the potential well (see [61]). We shall see below that the same result is obtained here : eigenmodes will be localized in the region where $\Delta > 0$ and selected by a discretization condition on their number of oscillations in that region. In the rest of this section, we shall obtain this discretization condition when there is a single interval of positive Δ . More precisely, we shall assume that the functions Δ and Φ satisfy one of the two hypotheses :

Hypothesis H1 : *The function Δ is positive for $0 \leq r < r_t$, negative for $r > r_t$ and has a single zero r_t . The function Φ does not vanish on the*

real axis.

Hypothesis H2 : The function Δ is positive for $r_1 < r < r_2$, negative for $0 \leq r < r_1$ and $r_2 < r$, and has two simple zeroes r_1 and r_2 . The function Φ does not vanish on the real axis.

When *Hypothesis H1* is satisfied, eigenmodes are localized between 0 and r_t . We shall denote such modes as “core modes”. When *Hypothesis H2* is satisfied, eigenmodes are localized between r_1 and r_2 and for this reason are termed “ring modes”. For the vortices considered in section A.4, regular neutral modes will be found to be either core modes or ring modes. However, for vortices with a more complex profile, one could imagine more complex modes, corresponding to configurations with multiple distinct regions where Δ is positive. Each type of mode would require a specific analysis, but it can follow the approach which is now presented for “core modes” and “ring modes”.

In section A.4, it will also be shown how the above hypotheses can be extended to deal with complex frequencies.

A.3.1 Core modes

When *Hypothesis H1* is satisfied, the mode structure can be decomposed into four regions.

- (1) The neighborhood of the center $r = 0$.
- (2) The “core” region between 0 and r_t .
- (3) The neighborhood of the turning point r_t .
- (4) The “outer” region for $r > r_t$.

In each region, a specific approximation of the mode is obtained. The condition of matching of the different approximations will provide the dispersion relation.

The neighborhood of $r = 0$.

In order to smooth the singularity of the WKBJ approximations at $r = 0$ we introduce the local variable $\bar{r} = kr$ and expand the perturbation pressure as

$$\bar{p}(\bar{r}) = \bar{p}_0(\bar{r}) + \frac{\bar{p}_1(\bar{r})}{k} + \dots \quad (\text{A.24})$$

At leading order, \bar{p}_0 is found to satisfy :

$$\frac{d^2 \bar{p}_0}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{d\bar{p}_0}{d\bar{r}} + \left(\frac{\Delta(0)}{\Phi^2(0)} - \frac{m^2}{\bar{r}^2} \right) \bar{p}_0 = 0 \quad (\text{A.25})$$

The solution which is bounded at $\bar{r} = 0$ is given by :

$$\bar{p}_0 = a_0 J_{|m|}(\beta_0 \bar{r}) \quad (\text{A.26})$$

where a_0 is a constant, $J_{|m|}$ is the usual Bessel function of first kind and β_0 is a positive constant given by :

$$\beta_0 = \frac{\sqrt{\Delta(0)}}{\Phi(0)} \quad (\text{A.27})$$

The “core” region ($0 < r < r_t$)

In the “core” region, the WKBJ approximations are valid and are oscillating functions. The matching with the solution valid in the neighborhood of $r = 0$ provides a condition on the solution in this region.

The function $J_m(z)$ in (A.26) has the following expansion (see [1]) for large $|z|$:

$$J_{|m|}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left(z - \frac{|m|\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad |arg(z)| < \pi. \quad (\text{A.28})$$

This guarantees that the leading order expression (A.26) can match (as $\bar{r} \rightarrow \infty$) a combination of WKBJ approximations :

$$p \sim A^+ p_0(r) e^{k\phi} + A^- p_0(r) e^{-k\phi} \quad (\text{A.29})$$

provided that,

$$A^+ e^{k\phi(0)} = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi\Delta(0)k}} e^{-i|m|\pi/2 - i\pi/4}, \quad (\text{A.30})$$

$$A^- e^{-k\phi(0)} = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi\Delta(0)k}} e^{i|m|\pi/2 + i\pi/4}, \quad (\text{A.31})$$

that is,

$$A^\pm = A_0 e^{\mp k\phi(0)} \exp \left(\mp \frac{i|m|\pi}{2} \mp \frac{i\pi}{4} \right). \quad (\text{A.32})$$

It follows that a leading order approximation for the solution in this region is given by

$$p \sim A_0 \sqrt{\frac{\Phi}{r}} \Delta^{1/4} \cos \left(k \int_0^r \frac{\sqrt{\Delta}}{\Phi} dr - \frac{|m|\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \quad (\text{A.33})$$

where A_0 is a constant which can be expressed in term of a_0 .

The “outer” region ($r > r_t$)

In the “outer” region, one of the WKBJ approximations is exponentially increasing while the other is exponentially decreasing. In order to form a solution which vanishes for large r , the exponentially growing WKBJ approximation should not be present in the solution. It follows that for $r > r_t$, the solution can be written at leading order as :

$$p \sim B_0 \sqrt{\frac{\Phi}{r}} (-\Delta)^{1/4} \exp \left(-k \int_{r_t}^r \frac{\sqrt{-\Delta}}{\Phi} dr \right) dr. \quad (\text{A.34})$$

The matching of the “outer” region with the “core” region is performed in the neighborhood of the turning point r_t . This provides the dispersion relation and a relation between the coefficients A_0 and B_0 of expressions (A.33) and (A.34).

Neighborhood of the turning point r_t

The local analysis of the neighborhood of a simple turning point is classical (see for instance [10]). Following the textbooks, one introduces a local variable $\tilde{r} = (r - r_t)k^{2/3}$, where the power $2/3$ is typical of a simple turning point analysis, and expands the perturbation pressure as :

$$\tilde{p}(\tilde{r}) = \tilde{p}_0(\tilde{r}) + k^{-1/3}\tilde{p}_1(\tilde{r}) + \dots \quad (\text{A.35})$$

At leading order, an equation is obtained for \tilde{p}_0 :

$$\frac{d^2\tilde{p}_0}{d\tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}}\frac{d\tilde{p}_0}{d\tilde{r}} + \frac{\Delta'_t\tilde{r}}{\Phi_t^2}\tilde{p}_0 = 0. \quad (\text{A.36})$$

This equation can be integrated as :

$$\tilde{p}_0(\tilde{r}) = b_0 A'_i(\kappa\tilde{r}) + c_0 B'_i(\kappa\tilde{r}), \quad (\text{A.37})$$

where b_0 and c_0 are constants, $A_i(z)$ and $B_i(z)$ are Airy functions (see [1]) and $\kappa = (-\Delta'_t/\Phi_t^2)^{1/3}$.

Dispersion relation

The matching of the “turning point region” with the “outer” region requires that the exponentially growing function B'_i in (A.37) should not be present in the solution, that is $c_0 = 0$. Using the following expansions [1] of $Ai'(z)$ for large $|z|$:

$$Ai'(z) \sim -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}z^{1/4}\exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right), \quad |arg(z)| < \pi, \quad (\text{A.38})$$

$$Ai'(-z) \sim -\frac{1}{\sqrt{\pi}}z^{1/4}\cos\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad |arg(z)| < \frac{2}{3}\pi, \quad (\text{A.39})$$

we obtain the relation :

$$-\frac{b_0}{2\sqrt{\pi}}\kappa^{1/4}k^{1/6} = B_0\sqrt{\frac{\Phi_t}{r_t}}(-\Delta'_t)^{1/4}, \quad (\text{A.40})$$

from the matching with the “outer” region, and

$$-\frac{b_0}{\sqrt{\pi}}\kappa^{1/4}k^{1/6}e^{-i\pi/4} = A_0\sqrt{\frac{\Phi_t}{r_t}}(-\Delta'_t)^{1/4} \times \exp\left(ik\int_0^{r_t}\frac{\sqrt{\Delta}}{\Phi}dr - \frac{i|m|\pi}{2} - \frac{i\pi}{4}\right), \quad (\text{A.41})$$

$$-\frac{b_0}{\sqrt{\pi}}\kappa^{1/4}k^{1/6}e^{i\pi/4} = A_0\sqrt{\frac{\Phi_t}{r_t}}(-\Delta'_t)^{1/4} \times \exp\left(-ik\int_0^{r_t}\frac{\sqrt{\Delta}}{\Phi}dr + \frac{i|m|\pi}{2} + \frac{i\pi}{4}\right), \quad (\text{A.42})$$

from the matching with the “core” region. Equations (A.40) and (A.42) yield

$$A_0^2 = 4B_0^2 \quad (\text{A.43})$$

and the dispersion relation that links k , m and ω :

$$\exp \left(2ik \int_0^{r_t} \frac{\sqrt{\Delta}}{\Phi} dr - i|m|\pi \right) = 1 , \quad (\text{A.44})$$

which can also be written as :

$$k = \frac{|m|\pi + 2n\pi}{2 \int_0^{r_t} \frac{\sqrt{\Delta}}{\Phi} dr} , \quad \text{where } n \text{ is a non-negative integer.} \quad (\text{A.45})$$

We recall that in the above expression, Φ and Δ are given by expressions (A.11) and (A.13) respectively and that r_t is a zero of Δ . Expression (A.45) is the dispersion relation for “core” modes in the limit of large k .

Spatial structure of the eigenmodes

Approximations for the pressure perturbation can now be obtained in each region using expressions (A.40) and (A.43). They depend on a unique amplitude factor A_0 which can be fixed to 1 such that a_0 , B_0 and b_0 are now given by

$$a_0 = \sqrt{\frac{\pi \Delta_0 k}{2}} \quad (\text{A.46})$$

$$B_0 = \frac{(-1)^n}{2} \quad (\text{A.47})$$

$$b_0 = -k^{-1/6} (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{r_t}} \Phi_t^{2/3} (-\Delta'_t)^{1/6} . \quad (\text{A.48})$$

Approximations for the velocity field are also easily derived from p using the system (A.10) which gives

$$u = -\frac{i\Phi}{\Delta} \frac{dp}{dr} - \frac{2im\Omega}{r\Delta} p \quad (\text{A.49})$$

$$v = \frac{\zeta}{\Delta} \frac{dp}{dr} + \frac{m\Phi}{r\Delta} p \quad (\text{A.50})$$

$$w = -\frac{k}{\Phi} p . \quad (\text{A.51})$$

We obtain the following expressions.

In the “core” region :

$$p \sim \sqrt{\frac{\Phi}{r}} \Delta^{1/4} \cos \left(k \int_0^r \frac{\sqrt{\Delta}}{\Phi} dr - \frac{|m|\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) , \quad (\text{A.52})$$

$$u \sim ik \sqrt{\frac{\Phi}{r}} \Delta^{-1/4} \sin \left(k \int_0^r \frac{\sqrt{\Delta}}{\Phi} dr - \frac{|m|\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) , \quad (\text{A.53})$$

$$v \sim -\frac{k\zeta \Delta^{-1/4}}{\sqrt{r\Phi}} \sin \left(k \int_0^r \frac{\sqrt{\Delta}}{\Phi} dr - \frac{|m|\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) , \quad (\text{A.54})$$

$$w \sim -\frac{k\Delta^{1/4}}{\sqrt{r\Phi}} \cos \left(k \int_0^r \frac{\sqrt{\Delta}}{\Phi} dr - \frac{|m|\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) . \quad (\text{A.55})$$

In the neighborhood of r_t ($r - r_t = O(k^{-2/3})$) :

$$p \sim -k^{-1/6}(-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{r_t}} \Phi_t^{2/3} (-\Delta'_t)^{1/6} A'_i \left(\kappa(r - r_t) k^{2/3} \right) \quad (\text{A.56})$$

$$u \sim -ik^{7/6}(-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{r_t}} \Phi_t^{1/3} (-\Delta'_t)^{-1/6} A_i \left(\kappa(r - r_t) k^{2/3} \right) \quad (\text{A.57})$$

$$v \sim k^{7/6}(-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{r_t}} \Phi_t^{-2/3} (-\Delta'_t)^{-1/6} \zeta_t A_i \left(\kappa(r - r_t) k^{2/3} \right) \quad (\text{A.58})$$

$$w \sim k^{5/6}(-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{r_t}} \Phi_t^{-1/3} (-\Delta'_t)^{1/6} A'_i \left(\kappa(r - r_t) k^{2/3} \right) \quad (\text{A.59})$$

with $\kappa = (-\Delta'_t/\Phi_t^2)^{1/3}$.

Near the origin $r = O(1/k)$:

$$p \sim \sqrt{\frac{\pi \Delta_0 k}{2}} J_{|m|}(\beta_0 k r) \quad (\text{A.60})$$

$$u \sim -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} k^{3/2} \left(J'_{|m|}(\beta_0 k r) + \frac{2m\Omega_0}{\sqrt{\Delta_0 k r}} J_{|m|}(\beta_0 k r) \right) \quad (\text{A.61})$$

$$v \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} k^{3/2} \left(\frac{\zeta_0}{\Phi_0} J'_{|m|}(\beta_0 k r) - \frac{m\Phi_0}{\sqrt{\Delta_0 k r}} J_{|m|}(\beta_0 k r) \right) \quad (\text{A.62})$$

$$w \sim -\sqrt{\frac{\pi \Delta_0}{2\Phi_0^2}} k^{3/2} J_{|m|}(\beta_0 k r) \quad (\text{A.63})$$

with $\beta_0 = \sqrt{\Delta_0}/\Phi_0$.

In the “outer” region :

$$p \sim \frac{(-1)^n}{2} \sqrt{\frac{\Phi}{r}} (-\Delta)^{1/4} \exp \left(-k \int_{r_t}^r \frac{\sqrt{-\Delta}}{\Phi} dr \right), \quad (\text{A.64})$$

$$u \sim -ik \frac{(-1)^n}{2} \sqrt{\frac{\Phi}{r}} (-\Delta)^{-1/4} \exp \left(-k \int_{r_t}^r \frac{\sqrt{-\Delta}}{\Phi} dr \right), \quad (\text{A.65})$$

$$v \sim \frac{(-1)^n}{2} \frac{k(-\Delta)^{-1/4}}{\sqrt{r\Phi}} \exp \left(-k \int_{r_t}^r \frac{\sqrt{-\Delta}}{\Phi} dr \right), \quad (\text{A.66})$$

$$w \sim -\frac{(-1)^n}{2} \frac{k(-\Delta)^{1/4}}{\sqrt{r\Phi}} \exp \left(-k \int_{r_t}^r \frac{\sqrt{-\Delta}}{\Phi} dr \right). \quad (\text{A.67})$$

These expressions will be compared to numerical results in the applications considered in section A.4.

A.3.2 Ring modes

When *hypothesis H2* is satisfied, the eigenmode structure can be divided in the following regions :

- (1) The neighborhood of the origin.
- (2) The “outer” region I for $0 < r < r_1$.
- (3) The neighborhood of the turning point r_1 .
- (4) The “ring” region for $r_1 < r < r_2$.
- (5) The neighborhood of the turning point r_2 .

(6) The “outer” region II for $r > r_2$.

The analysis is very similar to the one performed for “core modes”. In the **neighborhood of the origin**, the pressure is expressed in terms of Bessel functions. A leading order approximation is given by (A.26) but β_0 is now purely imaginary. Near the origin, the pressure can be written as :

$$\bar{p}_0 = a_0 I_{|m|}(\gamma_0 \bar{r}) , \quad (\text{A.68})$$

where a_0 is a constant, $I_{|m|}$ is the usual Bessel function of second kind and,

$$\gamma_0 = \frac{\sqrt{-\Delta(0)}}{\Phi(0)} . \quad (\text{A.69})$$

For large \bar{r} , expression (A.68) becomes exponentially large. In the **outer region I**, the solution can therefore be approximated by a single WKBJ wave :

$$p \sim A_I \sqrt{\frac{\Phi}{r}} (-\Delta)^{1/4} \exp \left(k \int_0^r \frac{\sqrt{-\Delta}}{\Phi} dr \right) , \quad (\text{A.70})$$

where the matching imposes a relation between A_I and a_0 . Note that if Δ was negative everywhere, the Outer region would extend up to infinity, and the approximation (A.70) would be unbounded for large r , invalidating the boundary condition at $+\infty$. This justifies the condition of existence stated above which requires a region of positive Δ .

In the **outer region II**, the solution is, as above, given by the subdominant WKBJ approximation :

$$p \sim A_{II} \sqrt{\frac{\Phi}{r}} (-\Delta)^{1/4} \exp \left(-k \int_{r_2}^r \frac{\sqrt{-\Delta}}{\Phi} dr \right) . \quad (\text{A.71})$$

The solution in **the turning point region near r_2** which matches this expression is, as above :

$$p \sim a_2 A'_i(\kappa_2 \tilde{r}) , \quad (\text{A.72})$$

where $\tilde{r} = (r - r_2)k^{2/3}$ and $\kappa = (-\Delta'_2/\Phi_2^2)^{1/3}$.

Similarly, the solution in **the turning point region near r_1** which matches expression (A.70) is :

$$p \sim a_1 A'_i(\kappa_1 \tilde{r}) , \quad (\text{A.73})$$

where $\tilde{r} = (r - r_1)k^{2/3}$ and $\kappa = -(\Delta'_1/\Phi_1^2)^{1/3}$.

Expressions (A.73) and (A.72) imply that in the “**ring**” region, the solution admits approximations of the form :

$$p \sim A_0 \sqrt{\frac{\Phi}{r}} \Delta^{1/4} \cos \left(k \int_{r_1}^r \frac{\sqrt{\Delta}}{\Phi} dr + \pi/4 \right) , \quad (\text{A.74})$$

and

$$p \sim B_0 \sqrt{\frac{\Phi}{r}} \Delta^{1/4} \cos \left(k \int_{r_2}^r \frac{\sqrt{\Delta}}{\Phi} dr - \pi/4 \right) , \quad (\text{A.75})$$

where A_0 and B_0 can be expressed in terms of a_1 and a_2 respectively. These two expressions are compatible only if

$$\sin \left(k \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{\Delta}}{\Phi} dr + \pi/2 \right) = 0 ,$$

that is,

$$k = \frac{n\pi + \pi/2}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{\sqrt{\Delta}}{\Phi}} , \quad \text{where } n \text{ is a non-negative integer.} \quad (\text{A.76})$$

Expression (A.76) is the dispersion relation for “ring modes” in the limit of large k .

Spatial structure of the eigenmodes

As for the core modes, approximations for the pressure and the velocity field of ring modes can now easily be obtained in each region. If we fix $A_0 = 1$, we get in each region the following expressions :

In the “ring” region

$$p \sim \sqrt{\frac{\Phi}{r}} \Delta^{1/4} \cos \left(k \int_{r_1}^r \frac{\sqrt{\Delta}}{\Phi} dr + \frac{\pi}{4} \right) , \quad (\text{A.77})$$

$$u \sim ik \sqrt{\frac{\Phi}{r}} \Delta^{-1/4} \sin \left(k \int_{r_1}^r \frac{\sqrt{\Delta}}{\Phi} dr + \frac{\pi}{4} \right) , \quad (\text{A.78})$$

$$v \sim -\frac{k\zeta \Delta^{-1/4}}{\sqrt{r\Phi}} \sin \left(k \int_{r_1}^r \frac{\sqrt{\Delta}}{\Phi} dr + \frac{\pi}{4} \right) , \quad (\text{A.79})$$

$$w \sim -\frac{k\Delta^{1/4}}{\sqrt{r\Phi}} \cos \left(k \int_{r_1}^r \frac{\sqrt{\Delta}}{\Phi} dr + \frac{\pi}{4} \right) . \quad (\text{A.80})$$

In the region near the turning point r_1 , defined by $r - r_1 = O(k^{-2/3})$:

$$p \sim k^{-1/6} \sqrt{\pi} \Phi_1^{2/3} r_1^{-1/2} (\Delta'_1)^{1/6} A'_i \left(\kappa_1 (r - r_1) k^{2/3} \right) , \quad (\text{A.81})$$

$$u \sim -ik^{7/6} \sqrt{\pi} \Phi_1^{1/3} r_1^{-1/2} (\Delta'_1)^{-1/6} A_i \left(\kappa_1 (r - r_1) k^{2/3} \right) , \quad (\text{A.82})$$

$$v \sim k^{7/6} \sqrt{\pi} \Phi_1^{-2/3} r_1^{-1/2} (\Delta'_1)^{-1/6} \zeta_1 A_i \left(\kappa_1 (r - r_1) k^{2/3} \right) , \quad (\text{A.83})$$

$$w \sim -k^{5/6} \sqrt{\pi} \Phi_1^{-1/3} r_1^{-1/2} (\Delta'_1)^{1/6} A'_i \left(\kappa_1 (r - r_1) k^{2/3} \right) , \quad (\text{A.84})$$

with $\kappa_1 = (\Delta'_1 / \Phi_1^2)^{1/3}$.

In the region near the turning point r_2 , defined by $r - r_2 = O(k^{-2/3})$:

$$p \sim -k^{-1/6} (-1)^n \sqrt{\pi} \Phi_2^{2/3} r_2^{-1/2} (-\Delta'_2)^{1/6} A'_i \left(\kappa_2 (r - r_2) k^{2/3} \right) , \quad (\text{A.85})$$

$$u \sim -ik^{7/6} (-1)^n \sqrt{\pi} \Phi_2^{1/3} r_2^{-1/2} (-\Delta'_2)^{-1/6} A_i \left(\kappa_2 (r - r_2) k^{2/3} \right) , \quad (\text{A.86})$$

$$v \sim k^{7/6} (-1)^n \sqrt{\pi} \Phi_2^{-2/3} r_2^{-1/2} (-\Delta'_2)^{-1/6} \zeta_2 A_i \left(\kappa_2 (r - r_2) k^{2/3} \right) , \quad (\text{A.87})$$

$$w \sim k^{5/6} (-1)^n \sqrt{\pi} \Phi_2^{-1/3} r_2^{-1/2} (-\Delta'_2)^{1/6} A'_i \left(\kappa_2 (r - r_2) k^{2/3} \right) . \quad (\text{A.88})$$

with $\kappa_2 = (-\Delta'_2/\Phi_2^2)^{1/3}$.

In the “outer” region I :

$$p \sim \sqrt{\frac{\Phi}{4r}} (-\Delta)^{1/4} \exp \left(k \int_{r_1}^r \frac{\sqrt{-\Delta}}{\Phi} dr \right), \quad (\text{A.89})$$

$$u \sim ik \sqrt{\frac{\Phi}{4r}} (-\Delta)^{-1/4} \exp \left(k \int_{r_1}^r \frac{\sqrt{-\Delta}}{\Phi} dr \right), \quad (\text{A.90})$$

$$v \sim -\frac{k(-\Delta)^{-1/4}}{2\sqrt{r\Phi}} \exp \left(k \int_{r_1}^r \frac{\sqrt{-\Delta}}{\Phi} dr \right), \quad (\text{A.91})$$

$$w \sim -\frac{k(-\Delta)^{1/4}}{2\sqrt{r\Phi}} \exp \left(k \int_{r_1}^r \frac{\sqrt{-\Delta}}{\Phi} dr \right), \quad (\text{A.92})$$

In the “outer” region II :

$$p \sim \frac{(-1)^n}{2} \sqrt{\frac{\Phi}{r}} (-\Delta)^{1/4} \exp \left(-k \int_{r_2}^r \frac{\sqrt{-\Delta}}{\Phi} dr \right), \quad (\text{A.93})$$

$$u \sim -ik \frac{(-1)^n}{2} \sqrt{\frac{\Phi}{r}} (-\Delta)^{-1/4} \exp \left(-k \int_{r_2}^r \frac{\sqrt{-\Delta}}{\Phi} dr \right), \quad (\text{A.94})$$

$$v \sim \frac{(-1)^n}{2} \frac{k(-\Delta)^{-1/4}}{\sqrt{r\Phi}} \exp \left(-k \int_{r_2}^r \frac{\sqrt{-\Delta}}{\Phi} dr \right), \quad (\text{A.95})$$

$$w \sim -\frac{(-1)^n}{2} \frac{k(-\Delta)^{1/4}}{\sqrt{r\Phi}} \exp \left(-k \int_{r_2}^r \frac{\sqrt{-\Delta}}{\Phi} dr \right), \quad (\text{A.96})$$

The above approximations for ring modes will be compared to numerical solutions in section A.4.2.

A.4 Applications

A.4.1 The Gaussian vortex without axial flow (Lamb vortex)

In this section, we consider a Gaussian vortex without axial flow. The base flow profile is given by (A.5) with $W_0 = 0$. In this case, the functions ω^\pm and ω_c have a limited number of possible behaviors. In figures A.1(a-d) the functions ω^\pm and ω_c are plotted for $m = 0, 1, 2, 3$. For larger values of m ($m > 3$), results are similar to figure A.1(d) : the three functions ω^+ , ω^- and ω_c are monotonically decreasing to zero; their values at $r = 0$ are $\omega^+(0) = m + 2$, $\omega^-(0) = m - 2$ and $\omega_c(0) = m$. The functions ω^\pm and ω_c , for negative m , are obtained by making the transformations $m \rightarrow -m$ and $\omega \rightarrow -\omega$.

Regular neutral core modes

The conditions (A.22) and (A.23) for the existence of regular neutral modes give here $-2 \leq \omega \leq 2$ for $m = 0$, $-1 \leq \omega \leq 0$ and $1 < \omega \leq 3$ for $m = 1$, and $m < \omega \leq m+2$ for $m \geq 2$. Inspections of figures A.1(a-d) shows that in all these frequency intervals, *Hypothesis H1* is satisfied. We therefore expect all regular neutral modes of the Lamb vortex to be core modes. In these

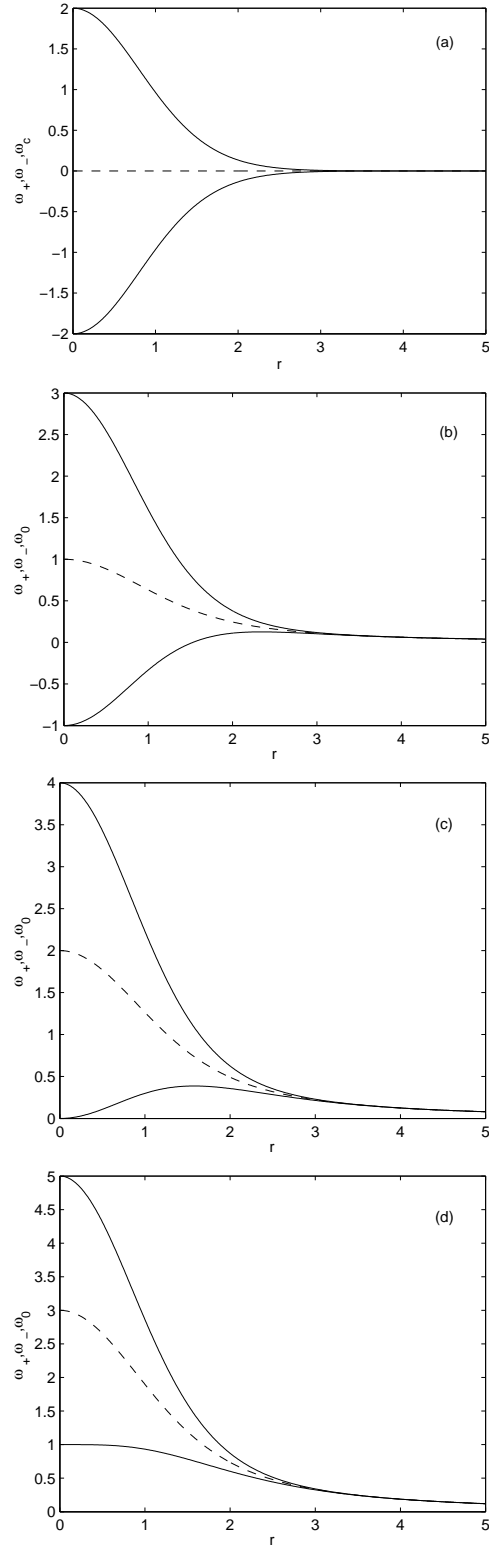


Figure A.1: The functions ω^\pm (solid lines) and ω_c (dashed line) versus r for the Lamb vortex. (a) : $m = 0$; (b) : $m = 1$; (c) : $m = 2$; (d) : $m = 3$.

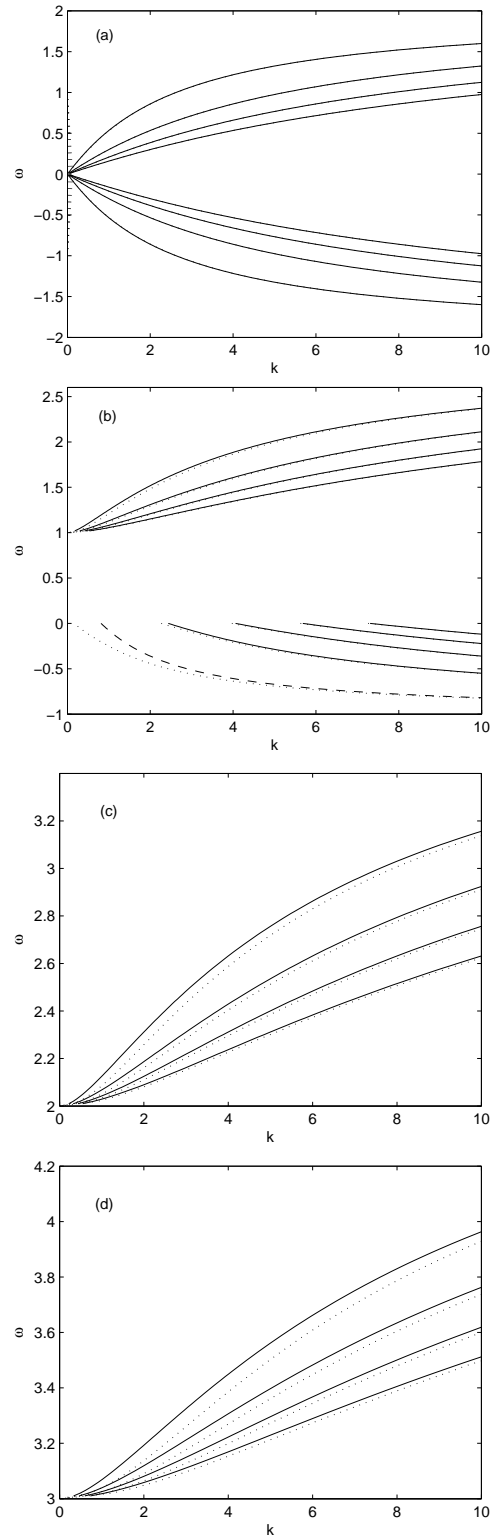


Figure A.2: Dispersion relation of neutral core modes of the Lamb vortex. Numerical results (dotted lines) and large- k asymptotic results [expression (A.45) for $n = 1, 2, 3, 4$] (solid lines). (a) : $m = 0$; (b) : $m = 1$; (c) : $m = 2$. (d) : $m = 3$. The dashed line in figure (b) is expression (A.45) with $n = 0$.

frequency intervals, formula (A.45) can be applied. The results are displayed in solid lines in figures A.2(a-d) for the first branches ($n = 1, 2, 3, 4$). In the same figures, dotted lines represent the dispersion relation obtained by a numerical integration of equation (A.12). These figures demonstrate the good agreement of the large- k dispersion relation with the numerics for not only large k , but also for small values of k . The asymptotic results also tend to be better for small m . For $m = 0$, the asymptotic predictions are almost identical to the numerical results for all values of k .

For $m = 1$, note that there is an additional branch for $\omega < 0$ in the numerics. This branch turns out to be associated with the $n = 0$ mode in expression (A.45). For large k , a good agreement is indeed obtained as demonstrated in figure A.2(b). It is worth mentioning that the $n = 0$ mode does not exist for $\omega > 1$.

For all $m \geq 1$, the branches associated with frequencies in the interval $m < \omega \leq m+2$ (that is, all the branches if $m \geq 2$) satisfy the same property. Their frequency starts from $\omega = m$ at $k = 0$, and grows monotonically with k , to $\omega = m+2$. The vanishing of k as $\omega \rightarrow m^+$ is due to the displacement of a critical point toward the origin which makes the integral in expression (A.45) divergent.

As explained above, the results for negative m are obtained by making the transformations $m \rightarrow -m$ and $\omega \rightarrow -\omega$.

Singular neutral core modes

For $m = 1$, the neutral branches, obtained in the previous section, stop abruptly when ω reaches 0. For small positive frequencies, a critical point singularity r_c is now present and Δ changes sign near this point (as seen on figure A.1(b)). This invalidates *hypothesis H1*. If we wanted to stay on the real axis, near such a critical point, viscous effects would have to be reintroduced to smooth the singularity. As mentioned above, the inviscid equation can however remain valid if we avoid the critical point in the complex plane following the rule of contour deformation prescribed by Lin (1955). This rule, which can be justified in the present context by using Le Dizès [66] results, states that the side where the contour is deformed, is obtained by considering the displacement of the critical point for weakly amplified frequencies : if the critical point goes in the lower quadrants ($\Im m(r_c) < 0$), one has to deform the contour above the critical point, if it goes in the upper quadrants, one has to deform the contour below. In the following, this rule is systematically applied. The displacement of the critical points is monitored and it is always checked that the integration contour remains in the region of the complex plane, where the inviscid equation is asymptotically valid. It is worth mentioning that by this procedure, the inviscid limit of a viscous eigenvalue is obtained but the corresponding eigenmode is no longer regular on the real axis. On the real axis, the eigenmode is expected to exhibit viscous oscillations which are not described by the present framework (see [30]).

The deformation of the contour in the complex plane also implies constraints on the large k analysis. Indeed, if the critical point shifts into the complex-

r plane the validity of the WKBJ approximations in the complex plane has to be considered. In principle, this requires the analysis of the characteristic curves associated with the WKBJ approximations defined as $\Re(\phi) = \text{Constant}$ and $\Im(\phi) = \text{Constant}$. Among these curves, Stokes lines and Anti-Stokes lines are known to play a particular role [95, 32]; they are defined respectively by :

$$\Re \int_{r_t}^r \frac{\sqrt{-\Delta}}{\Phi} dr = 0 , \quad (\text{A.97})$$

and

$$\Im \int_{r_t}^r \frac{\sqrt{-\Delta}}{\Phi} dr = 0 , \quad (\text{A.98})$$

where r_t is any turning point. In the present work, we mostly use the following result which can be deduced from the theorem 11.1 of Olver [95] : The WKBJ approximations are uniformly valid on any sufficiently regular finite path along which ϕ and p_0 are holomorphic and $\Re(\phi)$ is monotonic. Using Olver's terminology, we shall designate such a path as a progressive path. Note in particular that a part of a Stokes line which does not contain turning points and critical points is a progressive path. In this section and in the following section, our objective is to demonstrate that the asymptotic analysis of section A.3.1 also applies to complex-plane configurations. The main argument of the analysis is based on the fact that the matching procedure may be performed by the same method provided that we remain on progressive paths. This guarantees that the WKBJ approximations remain uniformly valid in each region. The boundary conditions at infinity and at the origin are then transmitted up to the turning point region without modification. For the core modes, the matching at r_c can then be performed in a similar way and it leads to the same dispersion relation.

For small positive values of ω , the Stokes line structure around the real axis has the typical form displayed in figure A.3. The critical point indicated by a star is close to two additional turning points indicated by black circles. What is remarkable is that one can find a progressive path which connects the first turning point to infinity by avoiding the critical point and the two nearby turning points in a complex region where the inviscid equation is expected to remain valid. The progressive character of the path is shown by checking that $\Re(\phi)$, where ϕ is given by (A.17), is a monotonic function along the path. This check has been performed and the results are shown in figure A.4 for the path indicated by a dotted line in figure A.3.

As WKBJ approximations are uniformly valid along this progressive path, it can replace the "real outer region" which was considered in the previous section. The core region is as previously the interval $]0, r_t[$. As this interval is along a Stokes line, it is also a progressive path. Finally the matching conditions across r_t can now be applied as in section A.3.1, if the progressive path associated with the outer region reaches r_t on the opposite side of r_t with respect to the core region. This condition can be expressed in term of Stokes lines : the "outer" progressive path must be in the (Stokes) sector delimited by the 2 other Stokes lines issued from r_t (i.e. different from

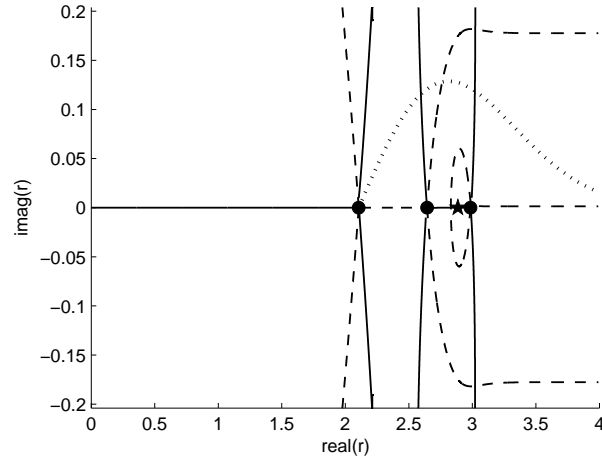


Figure A.3: Stokes lines (solid lines) and anti-Stokes lines (dashed lines) in the complex r plane for the Lamb vortex and $\omega = 0.12$ and $m = 1$. Black circles are turning points, the star is a critical point. The dotted curve represents a *progressive* path along which the integration can be carried out.

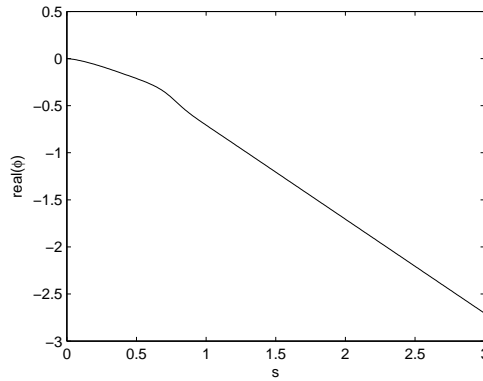


Figure A.4: Evolution of the function $\Re(\phi) = \Re(\int_{r_t}^{r(s)} \sqrt{\Delta}/\Phi dr)$ along the path $s \rightarrow r(s)$ indicated by a dotted line in figure A.3.

the Stokes line associated with the core region). The matching leads to the dispersion relation (A.45) where r_t is the first (smallest) turning point.

The typical structure (shown in figure A.3), which leads to this result, is obtained in the following cases :

- $m = 1 : 0 < \omega < \omega_c^{(1)} \approx 0.1267$
- $m = 2 : 0 < \omega < \omega_c^{(2)} \approx 0.3871$

The critical frequencies $\omega_c^{(1)}$ and $\omega_c^{(2)}$ are the frequencies for which the first and second turning points collide for $m = 1$ and $m = 2$, respectively. These frequencies are also visible in figures A.1(b,c), they correspond to the maximum values of $\omega^-(r)$.

If one applies relation (A.45) in these frequency intervals, one obtains the branches which are plotted in thick solid lines in figure A.5(a) for $m = 1$ and A.7(a) for $m = 2$. As will be discussed in more detail below, the agreement with numerical results (dotted lines) is very good. However, it is noteworthy that the numerical frequencies possess a small negative imaginary part when the first and second turning points are close to each other. This is visible in figure A.5(b) for $m = 1$ close to $\Re(\omega) \approx 0.12$, and in figure A.7(b) for $m = 2$ close to $\Re(\omega) \approx 0.35$. We think that this damping effect could be associated with higher order corrections in $1/k$ in the asymptotic analysis.

The singular neutral modes described here do not exist for $m \geq 3$ when no axial flow is present. We shall see below however that they can appear for other values of m when an axial flow is added.

Singular damped core modes

In this section, we demonstrate that formula (A.45) can also be applied to obtain damped modes. The principle has been explained above. It is to replace the real intervals by complex progressive paths. The core region between 0 and r_t is now a complex progressive path along which the two WKBJ approximations are oscillatory. This means that the core region is along a Stokes line connecting r_t to the vortex center. The turning point region is in the complex plane, and the outer region is a complex progressive path that goes from r_t to $+\infty$ (infinity on the real axis) and which leaves r_t on the opposite side of the core region, as explained above. In addition, the whole path that goes from 0 to ∞ (Stokes line between 0 and r_t and progressive path between r_t and $+\infty$) must avoid the critical point singularity as prescribed by Lin's rule. Checking these conditions requires a fine analysis of the Stokes lines network and a monitoring of the evolution of turning points and critical points as the parameters are varied. Indeed, there are several turning points in the complex plane, so one has to check that an appropriate choice is made in expression (A.45). Note that by contrast with the neutral modes, the integral in expression (A.45) has to be calculated in the complex plane, as r_t is now a complex number.

Examples of Stokes line structures obtained for damped eigenfrequencies are shown in figure A.6(a,b) for $m = 1$. The results for this value of m are shown in figures A.5(a,b). Figure A.5(a) displays the real part of the frequency versus k for the first four branches. Figure A.5(b) shows $\Re(\omega)$ versus $\Im m(\omega)$. Formula (A.45) tells us that, for all the branches, the fre-

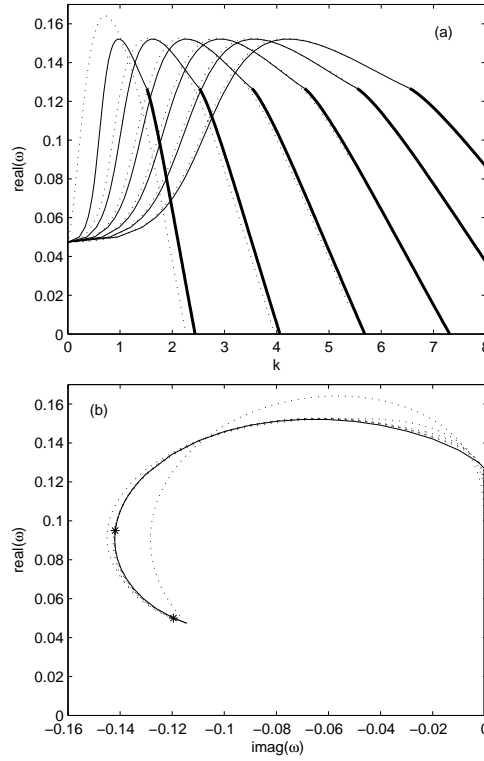


Figure A.5: Dispersion relation of singular core modes of the Lamb vortex for $m = 1$. (a) $\Re(\omega)$ versus k . (b) $\Re(\omega)$ versus $\Im(\omega)$. The thick solid lines indicate the neutral modes obtained in section A.4.1. The dotted lines are inviscid numerical results by Sipp & Jacquin [112]. The Stokes line structures of the eigenfrequencies indicated by stars in figure (b) are displayed in figure A.6.

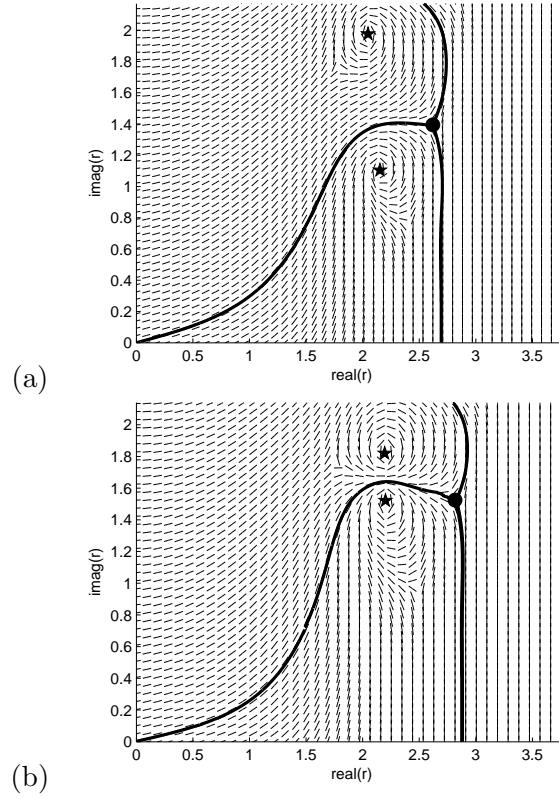


Figure A.6: Stokes line networks for $m = 1$ modes of the Lamb vortex. (a) $\omega = 0.095 - 0.142i$; (b) $\omega = 0.05 - 0.119i$. Stars are critical points and black circles are turning points. The relevant Stokes line network is indicated by a thick solid line. Short lines indicate on a grid the direction of the characteristic curves $\Re(\phi) = \text{Constant}$.

quencies should be on the same curve. This curve is given by the vanishing of the imaginary part in (A.45), i. e.

$$\Im m \left(\int_0^{r_t} \frac{\sqrt{\Delta}}{\Phi} dr \right) = 0 . \quad (\text{A.99})$$

This condition is the condition mentioned above, that is one of the Stokes lines leaving the turning point r_t should pass through the origin.

In figure A.5(a,b) the numerical results obtained by Sipp & Jacquin [112] by a non-viscous shooting method with contour deformation are shown in dotted lines. As can be seen, the agreement with the theory is very good. Of note is the convergence of all branches as k goes to zero to a single frequency $\omega \approx 0.0474 - 0.1144i$. As pointed out by Sipp & Jacquin (2003), at this frequency, the integration contour is pinched between two critical points. This is clearly visible on the Stokes line network shown in figure A.6(b). In our case, this means that a singularity (which cannot be removed) appears in the integral of formula (A.45). The consequence is that the integral becomes divergent, which implies that k has to go to zero. This behavior is typical : as soon as the integration contour is pinched between two critical points, the wavenumber decreases to zero.

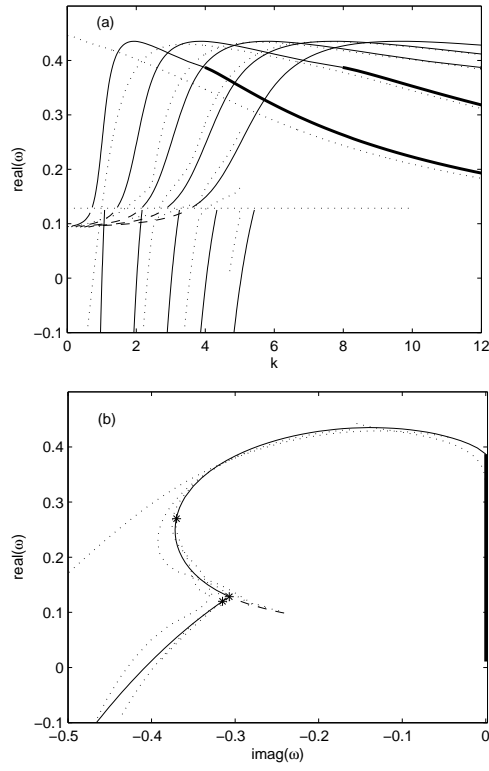


Figure A.7: Dispersion relation of singular core modes of the Lamb vortex for $m = 2$. (a) $\text{Re}(\omega)$ versus k . (b) $\text{Re}(\omega)$ versus $\text{Im}(\omega)$. The thick solid lines indicate the neutral modes obtained in section A.4.1. The dotted lines are inviscid numerical results by Fabre *et al.* [30]. The Stokes line structures of the eigenfrequencies indicated by stars in figure (b) are displayed in figure A.8.

In figures A.7(a,b) are the results for $m = 2$ together with numerical results by Fabre *et al.* [30]. The results by Fabre *et al.* [30] have been obtained by an inviscid spectral method. As in Sipp & Jacquin, the integration contour has been deformed in the complex plane. Fabre *et al.* [30] have also considered viscous effects. They have demonstrated that both $m = 1$ and $m = 2$ damped modes could indeed be obtained by a viscous code with small viscosity, without deforming the integration contour. This confirms that a correct integration contour has been chosen. What is surprising, in figure A.7(a), is the discontinuous behavior of the spatial branches. This discontinuity corresponds to the branch bifurcation shown in figure A.7(b) at $\omega \approx 0.1285 - 0.307i$. This strange behavior can be traced back to a topological change of the Stokes line structures. The Stokes line network at the crossing point frequency is shown in figure A.8(b). Before and after the bifurcation point, the network has typically the form shown on figures A.8(a) and A.8(c) respectively. The discontinuous behavior is therefore associated with a change of turning point. The dashed lines in figure A.7(a,b) indicate the predictions one would have obtained if one had kept the same turning point in formula (A.45). Asymptotically, these predictions are not good because the Stokes lines network has no longer the correct topology (as seen on figure A.8(c)). Despite this point, some numerical branches are shown to follow this prediction. For finite wavenumbers, one can imagine that higher order corrections are no longer negligible and sufficiently modify the Stokes lines to jump from the configuration shown in figure A.8(b), to the one shown in figure A.8(a). For large wavenumbers, i. e. for large n , we are expecting all the branches to follow the solid lines of figures A.7(a,b).

Larger values of m provide results which are all similar : frequencies are almost real near $\omega \approx m - 2$, and correspond to very large wavenumbers ; then, they become strongly damped. In figure A.9(a,b) the results for $m = 3$ are displayed. A typical Stokes line network for one of these modes is shown in figure A.10. As seen in figures A.9(a,b), the numerical results do not follow the asymptotic predictions as well as for $m = 1$ or $m = 2$. This trend was already noted above for regular core modes.

To close this section on the Lamb vortex, it is important to emphasize the following point. We have been able to identify a few normal modes of the Lamb vortex as core modes. Although one can reasonably think that all the **neutral** modes have been identified, it is clear that an important number of inviscid damped modes do not enter the category of modes described in this section. In particular, Fabre *et al.* [30] recently obtained numerically other families of inviscid damped modes. It is possible to check by looking at their Stokes line structure that these modes are not core modes but exhibit more complex Stokes line networks.

A.4.2 The Gaussian vortex with axial flow (Batchelor vortex)

In this section, we attempt to account for the effect of an axial flow on the characteristics of the normal modes. The base flow is assumed to be given by (A.5a,b). Only neutral modes will be considered. In particular, we shall not try to follow these modes as they become damped due to the

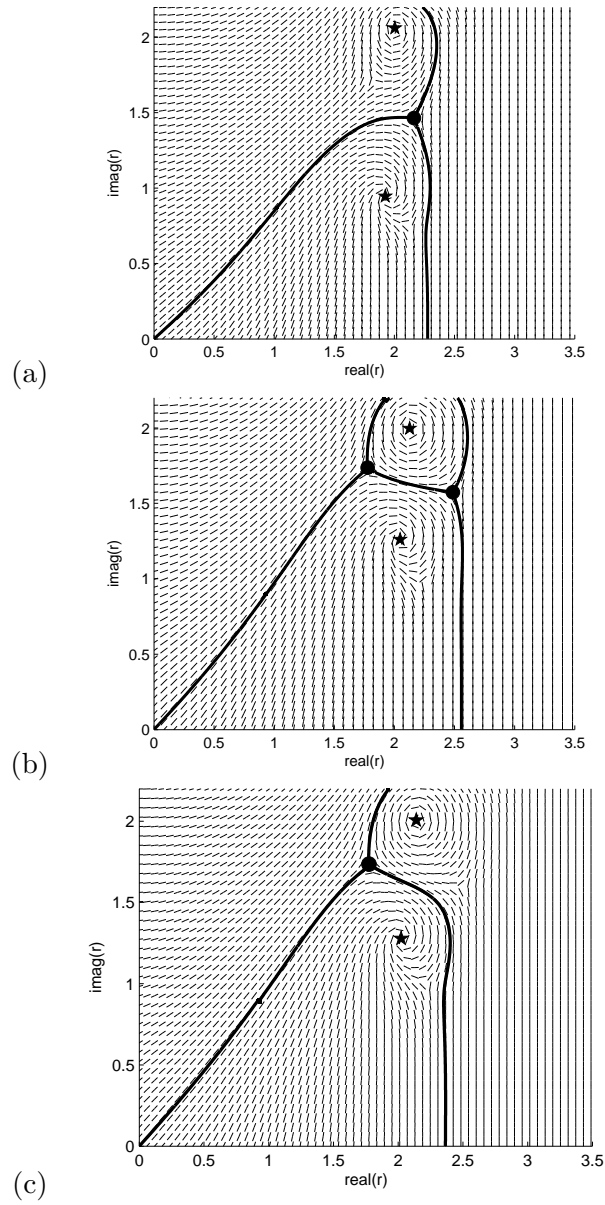


Figure A.8: Stokes line network for $m = 2$ modes of the Lamb vortex. (a) : $\omega = 0.27 - 0.37i$; (b) : $\omega = 0.1285 - 0.307i$; (c) : $\omega = 0.12 - 0.315i$. See caption figure A.6 for explanation of the symbols.

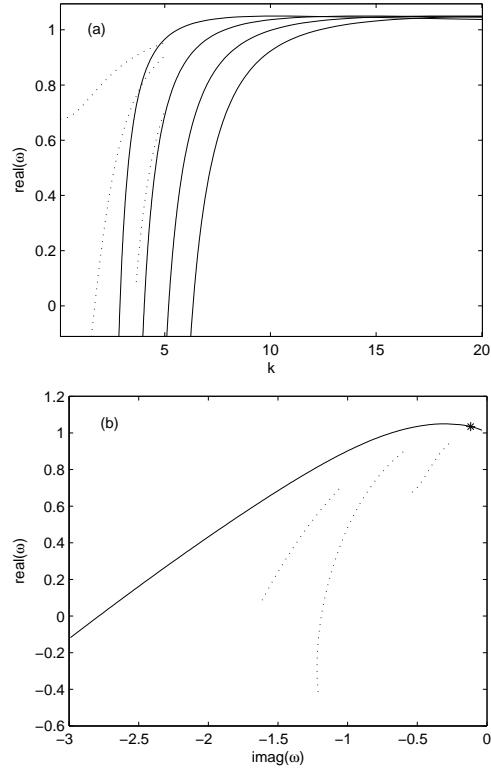


Figure A.9: Dispersion relation of singular core modes of the Lamb vortex for $m = 3$. (a) $\text{Re}(\omega)$ versus k . (b) $\text{Re}(\omega)$ versus $\text{Im}(\omega)$. The dotted lines are inviscid numerical results by Fabre *et al.* [30]. The Stokes line network of the eigenfrequency indicated by a star in figure (b) is displayed in figure A.10.

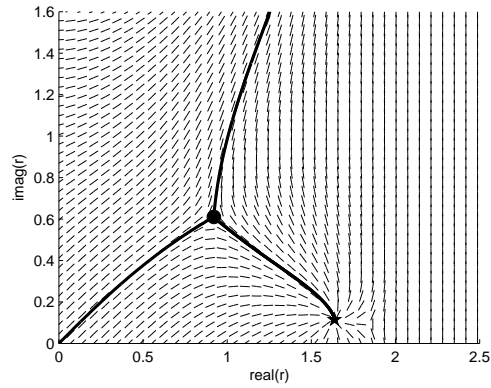


Figure A.10: Typical Stokes line network for $m \geq 3$ modes of the Lamb vortex. Here $m = 3$ and $\omega = 1.035 - 0.117i$. See caption figure A.6 for explanation of the symbols.

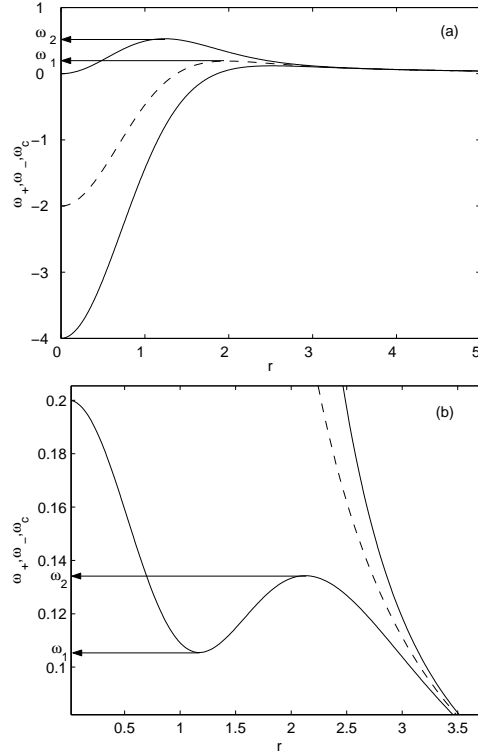


Figure A.11: The functions ω^\pm (solid lines) and ω_c (dashed line) versus r for the Batchelor vortex and the parameters $m = 1$, $kW_0 = -3$ (a) and $m = 1$, $kW_0 = 1.2$ (b). In (a), the values ω_1 and ω_2 are the maximum of ω_c and of ω^+ , respectively; In (b), they are local extrema of ω^- .

appearance of a critical point singularity, as was done in the previous section. As already emphasized in section A.3, only weak axial flow of order $1/k$ with $k \gg 1$ can a priori be considered in the asymptotic framework. However, as the previous asymptotic results have been shown to provide good estimates for small wavenumbers without axial flow, we shall also consider here finite values of the axial flow and finite wavenumbers.

As explained in section A.3, the frequency intervals of regular neutral eigenmodes are obtained by looking at the graph of the functions ω^+ , ω^- , and ω_c . Without axial flow, we have seen that a limited number of behaviors were possible, leading to core modes only. With an axial flow, others behaviors are now possible but they can only provide ring modes. In figure A.11(a,b), the functions ω^+ , ω^- and ω_c are plotted as a function of the radial coordinate r , for $m = 1$ and $kW_0 = -3$ and for $m = 1$ and $kW_0 = 1.2$. It can be seen on figure A.11(a), that *hypothesis H2* is here satisfied in the frequency interval (ω_1, ω_2) . This means that regular neutral ring modes can be expected in this frequency interval. Note also that, for these parameter values, regular neutral core modes are also expected in the frequency interval $(-4, -2)$.

In the frequency interval (ω_1, ω_2) shown in figure A.11(b), there exist also ring modes but they are singular at the critical point which is present for

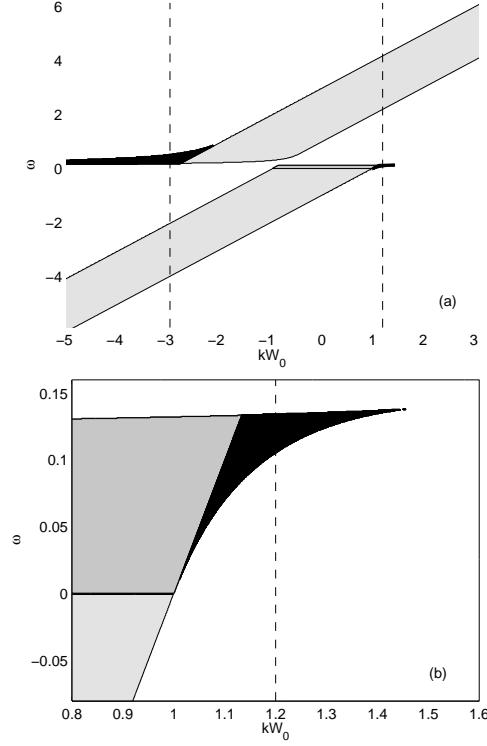


Figure A.12: Regions of the (ω, kW_0) space where neutral modes of Batchelor vortex are expected for $m = 1$. Pale gray, mild gray and black indicate regular neutral core mode region, singular neutral core mode region and neutral ring mode region, respectively. The large black region in (a) corresponds to regular neutral ring modes. The small singular neutral ring mode region, almost invisible in (a) is enlarged in (b). The vertical dashed lines indicated the parameter values for which ω^\pm and ω_c are plotted in figures A.11(a,b)

large r . As for singular neutral core modes, one could show that this critical point singularity can be avoided in the complex plane without affecting the dispersion relation which can be calculated for real r . These modes are singular neutral ring modes. We have been able to obtain such modes only for $m = \pm 1$. The regions of the parameter space where ring modes are expected are indicated in black in figure A.12(a) for $m = 1$. The region where singular neutral ring modes are expected is very small and limited to the black region shown in figure A.12(b). In figures A.12(a,b), the other regions in pale gray and mild gray correspond to regular neutral core modes and singular neutral core modes respectively. The region corresponding to the conditions (A.22) and (A.23) for the existence of regular neutral modes is nothing but the union of regular core mode region and regular ring mode region. This means that there is no other regular neutral modes in the white domains of figures A.12(a,b).

The position of ring mode and core mode regions varies with m . These variations are weak if one plots $\omega - m - kW_0$ instead of ω as demonstrated in figure A.13(a-d). For negative m , the regions are obtained by the trans-

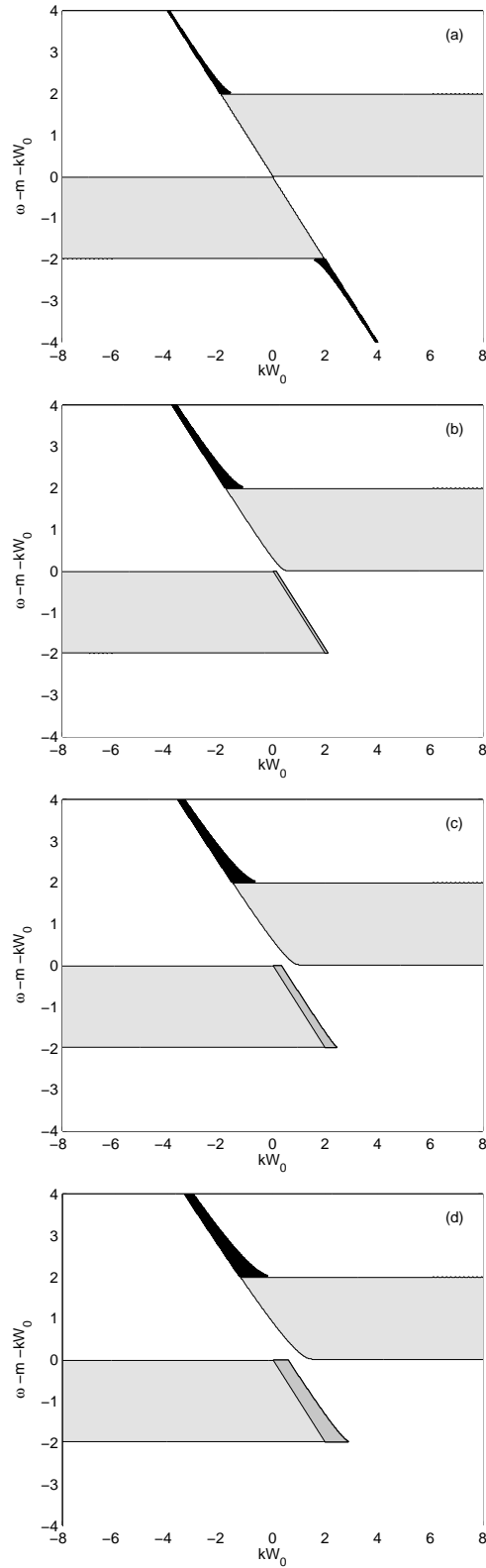


Figure A.13: Regions of the parameter space where neutral modes of the Batchelor vortex are expected. Pale gray, mild gray and black indicate regular neutral core mode region, singular neutral core mode region and regular neutral ring mode region, respectively. (a) $m = 0$; (b) $m = 1$; (c) $m = 2$; (d) $m = 3$. The very small region obtained for $m = 1$ where singular neutral ring modes are expected is not indicated.

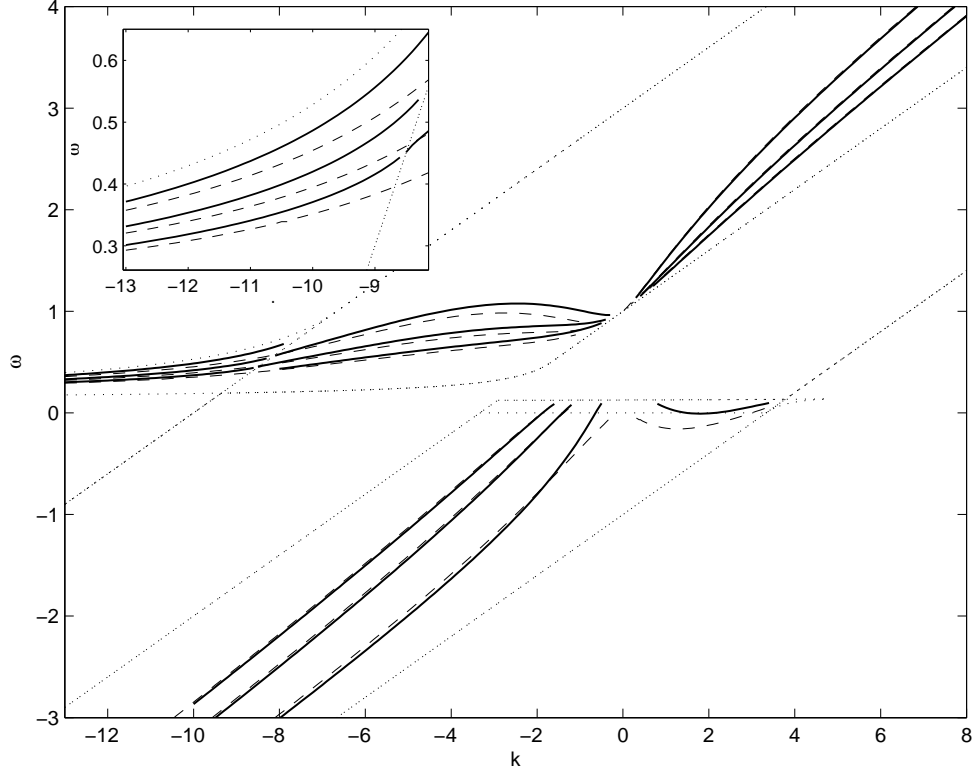


Figure A.14: Dispersion relation of neutral modes of the Batchelor vortex for $m = 1$ and $W_0 = 0.3$. Solid lines are asymptotic results. Dashed lines are numerical results. Dotted lines are the limits of the regions shown in figures A.13a-d. The insert plot is a close view of the region associated with regular ring modes.

formation $(\omega, k) \rightarrow (-\omega, -k)$. As seen in figure A.13, neutral core modes are expected only for frequencies satisfying $-2 < \omega - m - kW_0 < 2$. By contrast, neutral ring modes are located outside this frequency interval. It is important to stress that conditions (A.22) and (A.23) exactly correspond here to regular core mode and regular ring mode regions. In particular, this implies that there is no other regular modes than those considered here.

Formula (A.45) must be used in both gray regions, while formula (A.76) must be used in the black regions. As an illustration, the dispersion relation is shown in figure A.14 for $m = 1$ and $W_0 = 0.3$, for the first branches. Both numerical results and asymptotic predictions using (A.45) and (A.76) have been plotted. Numerical results have been obtained by a non-viscous shooting method, with a contour deformation procedure for the singular modes. Only neutral modes have been plotted. Numerous singular damped modes, consistent with those obtained in the previous section also exist, but they have not been displayed. Figure A.14 demonstrates that formula (A.45) also works well in the case of a vortex with axial flow. Most of the branches are well approximated, except, as for the case without axial flow, the first branch, which starts from $k = 0$. The predictions for the regular ring modes are also fairly good. Note however that there is no singular neutral ring mode for this value of W_0 .

Figures A.15(a,b) show the radial velocity distribution of two particular

eigenmodes as obtained from the asymptotic analysis and from the numerics. A core mode is displayed in figure A.15(a). The solid curves correspond to the different leading order approximations obtained in section A.3.1 near the origin (O), in the Core region, near the turning point (T) and in the Outer region. The thick part of each solid curve indicates the region where each approximation should apply. As expected, it is in these regions, that the asymptotic results are the closest to the numerical results (dotted curve). In figure A.15(b) is shown a ring mode. In that case, we have used for the solid curves the leading order approximations obtained in section A.3.2 in the Outer regions I and II, near each turning point r_1 and r_2 (T1 and T2), and in the Ring region. Again, a good agreement of each approximation with the numerics is obtained in the region where the approximation is expected to be valid.

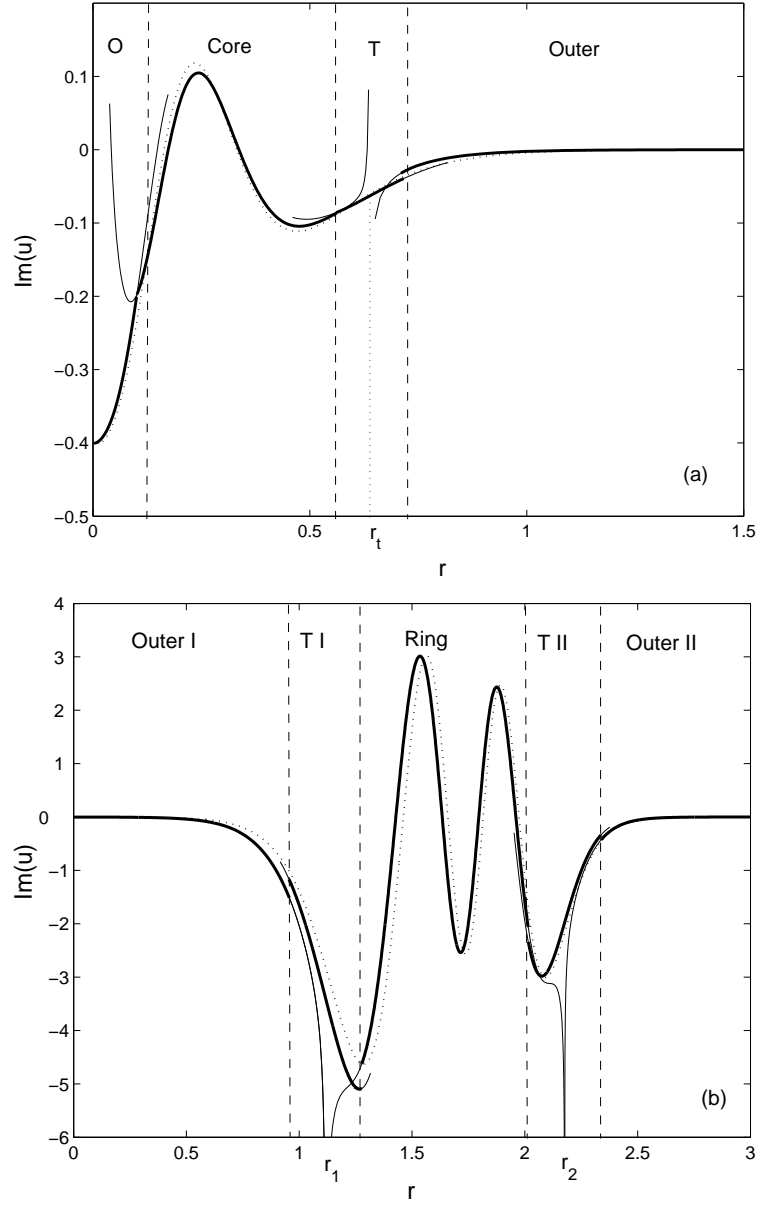


Figure A.15: Radial velocity profiles of eigenmodes of the Batchelor vortex for $W_0 = 0.3$. Dotted curve : Numerical results. Solid curves : asymptotical approximations. The different regions of the asymptotical analysis are also indicated. The solid curve is thicker in the region where the approximation is expected to be valid. (a) : Regular core mode ($m = 1, k = 8, \omega \approx 3.91$); (b) Regular ring mode ($m = 1, k = -13, \omega \approx 0.27$).

A.5 Conclusion

In this paper, an asymptotic description of the normal modes in a stable vortex has been proposed. It is based on a large axial wavenumber WKBJ analysis. A considerable effort has been made to connect the properties of the neutral modes to the characteristics of the base flow. In particular, we have shown how the analysis of a few quantities which are the epicyclic frequencies $\omega^\pm(r)$, and the critical frequency $\omega_c(r)$ defined in (A.20) and (A.21), respectively, permits the regions of existence of neutral modes to be located in the parameter space. Two types of neutral normal modes have been considered, which are either confined in the vortex core (core modes) or in a ring (ring modes). General dispersion relations have been derived for both cases. In the WKBJ terminology, core modes correspond to oscillating modes between the origin and a turning point, while ring modes are oscillating modes between two distant turning points. The asymptotic dispersion relations have been applied to a Gaussian vortex with and without axial flow. For the Gaussian vortex without axial flow (Lamb vortex), neutral modes have been shown to be core modes only. Their asymptotic dispersion relation has been found to be in very good agreement with numerical results, even for small values of the wavenumber. For the Gaussian vortex with axial flow (Batchelor vortex), neutral modes have been shown to be either core modes or ring modes. A comparison with the numerics has been carried out in a single case, and a good agreement has also been observed, for both core modes and ring modes. The spatial structure of the eigenmodes has also been shown to be well-reproduced.

The influence of critical point singularities has been analyzed in detail. We have shown that core modes can remain neutral at leading order, even if they possess a critical point singularity. Such “singular neutral core modes” have been exhibited for $m = 1$ and $m = 2$ in the case without axial flow. They have also been shown to exist in presence of axial flow. The critical point singularity damps the normal mode when it enters the core region. We have shown that the associated complex eigenfrequencies can still be computed with the same relation applied in the complex plane by avoiding the critical point singularity in the complex plane. However, a fine monitoring of the evolution of turning points and critical points have to be performed to track the different branches. This procedure has been carried out for two families of modes for the Lamb vortex ($m = 1$ and $m = 2$). The damped core modes which are obtained in this way, have been compared favorably with recent numerical simulations by Sipp & Jacquin [112] and Fabre *et al.* [30]. Interestingly, we have been able to provide an explanation to the peculiar behavior of the branches for $m = 2$: two different turning points have been shown to intervene in the eigenvalue relation.

For the applications, it is important to emphasize that the present theory permits to obtain information on *neutral* modes by a very simple procedure. We therefore expect our asymptotic results to be very valuable for describing instabilities, such as the elliptic instability, which result from the interaction of neutral modes. As reviewed by Kerswell (2002), the elliptic instability is due to the resonance of two normal modes with the underlying strain field

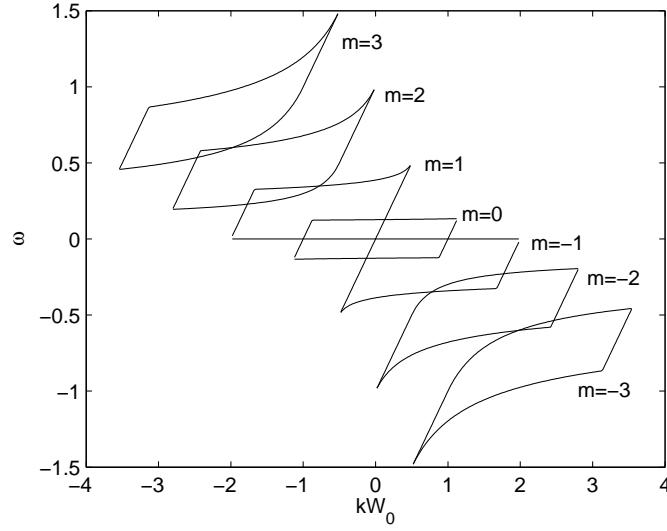


Figure A.16: Region in the (ω, kW_0) space of possible resonance of two neutral normal modes of azimuthal wavenumbers $m - 1$ and $m + 1$ for various m for the Batchelor vortex.

responsible for the elliptic deformation of the vortex. When the strain field is stationary, two neutral modes resonate if their frequencies and axial wavenumbers are identical, and their azimuthal wavenumbers differ by 2 (see e.g. [49]). The present analysis allows one to easily locate the regions of the parameter space where two neutral normal modes of azimuthal wavenumbers $m - 1$ and $m + 1$ can possibly resonate; one just has to find the intersection of the regions where the two neutral modes exist. For the Batchelor vortex studied in section A.4.2, this procedure leads to the results displayed in figure A.16. In each of these regions, resonance is a priori possible. Moreover, from the nature of the mode in each region, we have the following information : resonance is possible only between regular neutral core modes and singular neutral core modes. In particular, this implies that ring modes cannot be resonantly excited by the elliptical instability. The fine analysis of the resonance conditions in each region and its dependence with respect to W_0 is an important issue which could have applications in the aeronautical context, where the elliptical instability in a vortex with axial flow is known to be present. This will be the subject of a future study.

While we have focused on stable vortices, it is worth emphasizing that the same analysis could also be useful to describe unstable modes in other types of vortices. For instance, the axisymmetric unstable modes associated with the centrifugal instability can be captured by our analysis. These modes are stationary and localized in the radial region where the Rayleigh discriminant $\Upsilon(r) = 2\Omega(r)\zeta(r)$ is negative (e.g. [106]). Bayly [9] demonstrated that a large k -asymptotic analysis could be possible to describe these modes. With our terminology, these modes would be ring modes localized between two turning points satisfying $\Delta = 0$, i.e. $\Phi(r) = -\Im m(\omega)$. The most unstable modes would correspond to the configuration where the two turning points

are close to the minimum of Υ . We refer to Bayly [9] and Rossi [106] for details. Gallaire & Billant [34] recently showed that the same analysis could also be used to extend the Rayleigh instability criterion to non-axisymmetric modes.

This work has benefited from discussions with D. Fabre, A. Antkowiak and F. Gallaire. We would also like to thank D. Sipp and D. Fabre for having provided the numerical data plotted in figures A.5, A.7 and A.9. Thanks also to Kris Ryan for his careful reading of the manuscript.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ABRAMOWITZ M. & STEGUN I. A. (1965) *Handbook of Mathematical Functions*. New York : Dover.
- [2] ALDRIDGE K. D. & TOOMRE A. (1969) Axisymmetric inertial oscillations of a fluid in a rotating spherical container. *J. Fluid Mech.*, **37**, 307–323.
- [3] ALDRIDGE K. D., SEYED-MAHMOUD B., HENDERSON G. & VAN WIJNGAARDEN W. (1997) Elliptical instability of the Earth’s fluid core. *Phys. Earth Planet. Int.*, **103**, 365–374.
- [4] ARENDT S., FRITTS D. C. & ANDREASSEN Ø. (1997) The initial value problem for Kelvin vortex waves. *J. Fluid Mech.*, **344**, 181–212.
- [5] ARNOLD. (1978) *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer.
- [6] ASH R. L. & KHORRAMI M. R. (1995) Vortex Stability. *Chap. VIII, pages 317–372 de : GREEN S. I. (éd.), Fluid Vortices*. Kluwer Academic Publishers.
- [7] BATCHELOR G. K. (1964) Axial flow in trailing line vortices. *J. Fluid Mech.*, **20**, 645–658.
- [8] BAYLY B. J. (1986) Three-dimensional Instability of Elliptical Flow. *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 2160–2163.
- [9] BAYLY B. J. (1988) Three-dimensional centrifugal-type instabilities in inviscid two-dimensional flows. *Phys. Fluids*, **31**(1), 56–64.
- [10] BENDER C. M. & ORSZAG S. A. (1978) *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. New York : McGraw-Hill.
- [11] BETZ A. (1933) Behavior of vortex systems. *NACA Tech. Memo.*, 713.
- [12] BIELLO J. A., SALDANHA K. I. & LEOVITZ N. R. (2000) Instabilities of exact, time-periodic solutions of the incompressible Euler equations. *J. Fluid Mech.*, **404**, 269–287.
- [13] BRITO D., CARDIN P., NATAF H.-C. & MAROLLEAU G. (1995) Experimental study of a geostrophic vortex of gallium in a transverse magnetic field. *Phys. Earth Planet. Inter.*, **91**, 77–98.
- [14] BUSSE F.H. (1968) Steady fluid flow in a precessing spheroidal shell. *J. Fluid Mech.*, **33**, 739–751.
- [15] BUSSE F.H. (1970) Thermal instabilities in rapidly rotating systems. *J. Fluid Mech.*, **44**, 441–460.
- [16] CADOT O., DOUADY S. & COUDER Y. (1995) Characterization of the low pressure filaments in three-dimensional turbulent shear flow. *Phys. Fluids*, **7**(3), 630–646.

-
- [17] CHANDRASEKHAR S. (1961) *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford : Clarendon Press.
- [18] CRAIK A. D. D. (1985) *Wave interactions and fluid flows*. Cambridge University Press.
- [19] CROW S. C. (1970) Stability theory for a pair of trailing vortices. *AIAA J.*, **8**(12), 2172–2179.
- [20] DEVENPORT W. J., RIFE M. C., LIAPS S. I. & FOLLIN G. J. (1996) The structure and development of a wing-tip vortex. *J. Fluid Mech.*, **312**, 67–106.
- [21] DRAZIN P. G. & REID W. H. (1981) *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press.
- [22] DUCK P. W. & KHORRAMI M. R. (1992) A note on the effect of viscosity on the stability of a trailing line vortex. *J. Fluid Mech.*, **245**, 175–189.
- [23] ELOY C. (2000) *Instabilité multipolaire de tourbillons*. Ph.D. thesis, Université Aix-Marseille II.
- [24] ELOY C. & LE DIZÈS S. (1999) Three-dimensional instability of Burgers and Lamb-Oseen vortices in a strain field. *J. Fluid Mech.*, **378**, 145–166.
- [25] ELOY C. & LE DIZÈS S. (2001) Stability of the Rankine vortex in a multipolar strain field. *Phys. Fluids*, **13**(3), 660–676.
- [26] ELOY C., LE GAL P. & LE DIZÈS S. (2000) Experimental Study of the Multipolar Vortex Instability. *Phys. Rev. Lett.*, **85**(16), 145–166.
- [27] ELOY C., LE GAL P. & LE DIZÈS S. (2003) Elliptic and triangular instabilities in rotating cylinders. *J. Fluid Mech.*, **476**, 357–388.
- [28] FABRE D. (2002) *Instabilités et instationnarités dans les tourbillons : application aux sillages d'avions*. Ph.D. thesis, ONERA/Université Paris VI.
- [29] FABRE D. & JACQUIN L. (2004) Short-wave cooperative instabilities in representative aircraft vortices. *Phys. Fluids*, **16**, 2142.
- [30] FABRE D. & JACQUIN L. (2004) Viscous instabilities in trailing vortices at large swirl numbers. *J. Fluid Mech.*, **500**, 239–262.
- [31] FEARN D.R. (1998) Hydromagnetic flow in planetary cores. *Rep. Prog. Phys.*, **61**, 175–235.
- [32] FEDORYUK M. V. (1993) *Asymptotic analysis*. Springer verlag.
- [33] FUKUMOTO Y. (2003) The three-dimensional instability of a strained vortex tube revisited. *J. Fluid Mech.*, **493**, 287–318.
- [34] GALLAIRE F. & CHOMAZ J.-M. (2003) Instability mechanisms in swirling flows. *Phys. Fluids*, **15**(9), 2622–2639.
- [35] GILBERT W. (1600) De Magnete.
- [36] GLATZMAIER G. A. & ROBERTS P. H. (1995) A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. *Nature*, **377**, 203–209.

-
- [37] GLEDZER E. B. & PONOMAREV V. M. (1977) Finite dimensional approximation of the motions of an incompressible fluid in an ellipsoidal cavity. *Isv. Atmos. Ocean. Phys.*, **13**, 565–569.
- [38] GLEDZER E. B., DOLZHANSKY F. V., OBUKHOV A. M. & PONOMAREV V. M. (1975) An experimental and theoretical study of the stability of motion of a liquid in an elliptical cylinder. *Isv. Atmos. Ocean. Phys.*, **11**, 617–622.
- [39] GREENSPAN H. P. (1968) *The theory of rotating fluids*. Cambridge : Cambridge University Press.
- [40] HOLLERBACH R. & KERSWELL R.R. (1995) Oscillatory internal shear layers in rotating and precessing flows. *J. Fluid Mech.*, **298**, 327–339.
- [41] HOUGH S. S. (1895) The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid. *Phil. Trans. A*, **186**, 469–506.
- [42] HOWARD L. N. & GUPTA A. S. (1962) On the hydrodynamic and hydromagnetic stability of swirling flows. *J. Fluid Mech.*, **14**(3), 463–476.
- [43] JACQUIN L. ANF FABRE D., GEFFROY P. & COUSTOLS E. (2001) The properties of a transport aircraft wake in the extended nearfield : An experimental study. *AIAA Paper*, 1038.
- [44] JACQUIN L., FABRE D., SIPP D., THEOFILIS V. & VOLLMERS H. (2003) INstability and unsteadiness of wake vortices. *Aerosol Sci. Technol.*, **7**(8), 577–593.
- [45] JONES C. A., SOWARD A. M. & MUSSA I. A. (2000) The onset of thermal convection in a rapidly rotating sphere. *J. Fluid Mech.*, **405**, 157–179.
- [46] KAGAN B. A. (1997) Earth-Moon tidal evolution : model results and observational evidence. *Prog. Oceanog.*, **40**, 109–124.
- [47] KELVIN LORD. (1880) Vibrations of a columnar vortex. *Phil. Mag.*, **10**, 155–168.
- [48] KERSWELL R. R. (1999) Secondary instabilities in rapidly rotating fluids : inertial wave breakdown. *J. Fluid Mech.*, **382**, 283–306.
- [49] KERSWELL R. R. (2002) Elliptical instability. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **34**, 83–113.
- [50] KERSWELL R. R. & MALKUS W. V. R. (1998) Tidal instability as the source for Io's magnetic signature. *Geophysical Research Letters*, **25**, 603–606.
- [51] KERSWELL R.R. (1993) The instability of precessing flow. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **72**, 107–144.
- [52] KERSWELL R.R. (1994) Tidal excitation of hydromagnetic waves and their damping in the Earth. *J. Fluid Mech.*, **274**, 219–241.
- [53] KERSWELL R.R. (1995) On the internal shear layers spawned by the critical regions in oscillatory Ekman boundary layers. *J. Fluid Mech.*, **298**, 311–325.

-
- [54] KHORRAMI M. R. (1991) On the viscous modes of instability of a trailing line vortex. *J. Fluid Mech.*, **225**, 197–212.
- [55] KIVELSON M. G., KHURANA K. K., RUSSEL C. T., WALKER R. J., WARNECKE J., CORONITI F. V., POLANSKEY C., SOUTHWOOD D. J. & SCHUBERT G. (1996) Discovery of Ganymede's magnetic field by the Galileo spacecraft. *Nature*, **384**, 537–541.
- [56] KIVELSON M. G., KHURANA K. K., CORONITI F. V., JOY S., RUSSEL C. T., WALKER R. J., WARNECKE J., BENNETT L. & POLANSKEY C. (1996) The magnetic field and magnetosphere of Ganymede. *Geophys. Res. Lett.*, **24**, 2155–2158.
- [57] LACAZE L., BIRBAUD A.-L. & LE DIZÈS S. (2004) Elliptic instability in a Rankine vortex with axial flow. *Phys. Fluids*. in press.
- [58] LACAZE L., LE GAL P. & LE DIZÈS S. (2004) Elliptical instability in a rotating spheroid. *J. Fluid Mech.*, **505**, 1–22.
- [59] LACAZE L., LE GAL P. & LE DIZÈS S. (2004) Elliptical instability of a flow in a rotating shell. *Phys. Earth Planet. Int.* submitted.
- [60] LACAZE L., RYAN K. & LE DIZÈS S. (2004) Short wave instabilities in a counter-rotating Batchelor vortex pair. (in preparation).
- [61] LANDAU L. & LIFCHITZ E. (1966) *Mécanique Quantique, Théorie non relativiste*. Éditions MIR.
- [62] LANDAU L. LIFCHITZ E. (1964) *Physique théorique : Mécanique*. EDITIONS MIR.
- [63] LAPORTE F. (2002) *Simulation numérique appliquée à la caractérisation et aux instabilités des tourbillons de sillage des avions de transport*. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, CERFACS.
- [64] LASHERAS J. C. & CHOI H. (1988) Three-dimensional instability of a plane free shear layer : an experimental study of the formation and evolution of streamwise vortices. *J. Fluid Mech.*, **189**, 53–86.
- [65] LE BARS M. (2003) *Convection thermique dans un fluide visqueux hétérogène : phénoménologie, lois d'échelle et applications aux systèmes terrestres*. Ph.D. thesis, Institut de Physique du Globe de Paris.
- [66] LE DIZÈS S. (2004) Viscous Critical-Layer Analysis of Vortex Normal Modes. *Stud. Appl. Math.*, **112**(4), 315–332.
- [67] LE DIZÈS S. & ELOY C. (1999) Short-wavelength instability of a vortex in a multipolar strain field. *Phys. Fluids*, **11**(2), 500–502.
- [68] LE DIZÈS S. & FABRE D. (2004) Asymptotic analysis of viscous centre modes in vortices. In preparation.
- [69] LE DIZÈS S. & LACAZE L. (2004) An asymptotic description of vortex Kelvin modes. *J. Fluid Mech.* revised submission.
- [70] LE DIZÈS S. & LAPORTE F. (2002) Theoretical predictions for the elliptic instability in a two-vortex flow. *J. Fluid Mech.*, **471**, 169–201.
- [71] LE DIZÈS S., ROSSI M. & MOFFATT H. K. (1996) On the three-dimensional instability of elliptical vortex subjected to stretching. *Phys. Fluids*, **8**(8), 2084–2090.

-
- [72] LE GAL P. (2004) *personal communication*.
- [73] LEIBOVICH S. & STEWARTSON K. (1983) A sufficient condition for the instability of columnar vortices. *J. Fluid Mech.*, **126**, 335–356.
- [74] LESSEN M. & PAILLET F. (1974) The stability of a trailing line vortex. Part 2. Viscous theory. *J. Fluid Mech.*, **65**, 769–779.
- [75] LESSEN M., DESHPANDE N. V. & HADJI-OHANES B. (1973) Stability of a potential vortex with a non-rotating and rigid-body rotating top-hat jet core. *J. Fluid Mech.*, **60**, 459–466.
- [76] LESSEN M., SINGH P. J. & PAILLET F. (1974) The stability of a trailing line vortex. Part 1. Inviscid theory. *J. Fluid Mech.*, **63**(4), 753–763.
- [77] LEWEKE T. & WILLIAMSON C. H. K. (1998) Cooperative elliptic instability of a vortex pair. *J. Fluid Mech.*, **360**, 85–119.
- [78] LEWEKE T. & WILLIAMSON C. H. K. (1998) Three-dimensional instabilities in wake transition. *Eur. J Mech. B/Fluids*, **17**, 571–586.
- [79] LIN C. C. (1955) *The theory of hydrodynamics stability*. Cambridge University Press.
- [80] LONDON F. (1938) The λ -phenomenon of liquid helium and the Bose-Einstein degeneracy. *Nature*, **141**.
- [81] MALKUS W. V. R. (1989) An experimental study of global instabilities due to tidal (elliptical) distortion of a rotating elastic cylinder. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **48**, 123–134.
- [82] MALKUS W.V.R. (1968) Precession of the Earth as the Cause of Geomagnetism. *Science*, **160**(3825), 259–264.
- [83] MASON D. M. & KERSWELL R. R. (1999) Nonlinear evolution of the elliptical instability : an example of inertial wave breakdown. *J. Fluid Mech.*, **396**, 73–108.
- [84] MAYER E. W. & POWELL K. G. (1992) Viscous and inviscid instabilities of a trailing vortex. *J. Fluid Mech.*, **245**, 91–114.
- [85] MCEWAN A. D. (1970) Inertial oscillations in a rotating fluid cylinder. *J. Fluid Mech.*, **40**, 603–640.
- [86] MEUNIER P. (2001) *Étude expérimentale de deux tourbillons corotatifs*. Ph.D. thesis, Université d’Aix-Marseille 1.
- [87] MEUNIER P. & LEWEKE T. (2001) Three-dimensional instability during vortex merging. *Phys. Fluids*, **13**(10), 2747–2750.
- [88] MEUNIER P., EHRENSTEIN U., LEWEKE T. & ROSSI M. (2002) A merging criterion for two-dimensional co-rotating vortices. *Phys. Fluids*, **14**, 2757.
- [89] MOORE D. W. & SAFFMAN P. G. (1971) Structure of a line vortex in an imposed strain. *Pages 339–354 de : OLSEN, GOLBURG & ROGERS* (éds.), *Aircraft wake turbulence*. Plenum.
- [90] MOORE D. W. & SAFFMAN P. G. (1975) The instability of a straight vortex filament in a strain field. *Proc. R. Soc. Lond. A.*, **346**, 413–425.

-
- [91] NOIR J. (2000) *Écoulements d'un fluide dans une cavité en précession : approches numérique et expérimentale*. Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I.
 - [92] NOIR J., JAULT D. & CARDIN P. (2001) Numerical study of the motions within a slowly precessing sphere at low Ekman number. *J. Fluid Mech.*, **437**, 283–299.
 - [93] NOIR J., CARDIN P., JAULT D. & MASSON J.-P. (2003) Experimental evidence of nonlinear resonance effects between retrograde precession and the tilt-over mode within a spheroid. *Geophys. J. Int.*, **154**, 407–416.
 - [94] ODIER P., PINTON J.-F. & FAUVE S. (2000) Magnetic induction by coherent vortex motion. *Eur. Phys. J. B*, **16**, 373–378.
 - [95] OLVER F. W. J. (1997) *Asymptotics and special functions*. A K Peters, Ltd.
 - [96] OPPENHEIMER J. & VOLKOFF G. (1939) *Phys. Rev.*, **55**, 347.
 - [97] PIERREHUMBERT R. T. (1986) Universal short-wave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid. *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 2157–2160.
 - [98] POINCARÉ H. (1910) Sur la précession des corps déformables. *Bull. Astron.*, **27**, 321–356.
 - [99] PULLIN D. I. & SAFFMAN P. G. (1998) Vortex dynamics in turbulence. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**, 31–51.
 - [100] REMPFER D. (2003) Low-dimensional modeling and numerical simulation of transition in simple shear flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **35**, 229–265.
 - [101] RIEUTORD M. & VALDETTARO L. (1997) Inertial waves in a rotating spherical shell. *J. Fluid Mech.*, **341**, 77–99.
 - [102] RIEUTORD M., GEORGEOT B. & VALDETTARO L. (2001) Inertial waves in a rotating spherical shell : attractors and asymptotic spectrum. *J. Fluid Mech.*, **435**, 103–144.
 - [103] ROBERTS P. H. (1968) On the thermal instability of a rotating-fluid sphere containing heat sources. *Phil. Trans. A*, **263**, 93–117.
 - [104] ROBERTS P. H. & GLATZMAIER G. A. (2000) Geodynamo theory and simulations. *Reviews of Modern Physics*, **72**(4), 1081–1123.
 - [105] ROBERTS P. H. & STEWARTSON K. (1965) On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **61**, 279–288.
 - [106] ROSSI M. (2000) Of Vortices and vortical layers : an overview. *Pages 40–123 de : MAUREL A & PETITJEANS P. (éds.), Vortex Structure and Dynamics*. Springer Verlag.
 - [107] SAFFMAN P. G. (1992) *Vortex dynamics*. Cambridge : Cambridge University Press.
 - [108] SEYED-MAHMOUD B., HENDERSON G. & ALDRIDGE K. D. (2000) A numerical model for elliptical instability of the Earth's fluid outer core. *Phys. Earth Planet. Int.*, **117**, 51–61.

-
- [109] SEYED-MAHMOUD B., ALDRIDGE K. D. & HENDERSON G. (2004) Elliptical instability in rotating spherical fluid shells : application to Earth's fluid core. *Phys. Earth Planet. Int.*, **142**, 257–282.
- [110] SIPP D. (1999) *Instabilités dans les écoulements tourbillonnaires*. Ph.D. thesis, Ecole polytechnique, Palaiseau.
- [111] SIPP D. (2000) Weakly nonlinear saturation of short-wave instabilities in a strained Lamb-Oseen vortex. *Phys. Fluids*, **12**(7), 1715–1729.
- [112] SIPP D. & JACQUIN L. (2003) Widnall instabilities in vortex pairs. *Phys. Fluids*, **15**, 1861–1874.
- [113] SPALART P. R. (1998) Airplane trailing vortices. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **30**, 107–138.
- [114] STEWARTSON K. & BROWN S. (1985) Near-neutral-centre-modes as inviscid perturbations to a trailing line vortex. *J. Fluid Mech.*, **156**, 387–399.
- [115] STEWARTSON K. & LEIBOVICH S. (1987) On the stability of a columnar vortex to disturbances with large azimuthal wavenumbers : the upper neutral points. *J. Fluid Mech.*, **178**, 549–566.
- [116] STEWARTSON K. & ROBERTS P. H. (1963) On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body. *J. Fluid Mech.*, **17**, 1–20.
- [117] SUESS S. T. (1971) Viscous flow in a deformable rotating container. *J. Fluid Mech.*, **45**, 189–201.
- [118] SVIDZINSKY A. A. & FETTER A. L. (2000) Dynamics of a vortex in a trapped Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, **62**, 185–200.
- [119] T. LOISELEUX, J.M. CHOMAZ & P. HUERRE. (1998) The effect of swirl on jets and wakes : Linear instability of the Rankine vortex with axial flow. *Phys. Fluids*, **10**(5), 1120–1134.
- [120] TSAI C.-Y. & WIDNALL S. E. (1976) The stability of short waves on a straight vortex filament in a weak externally imposed strain field. *J. Fluid Mech.*, **73**(4), 721–733.
- [121] WALEFFE F. (1989) *The 3D instability of a strained vortex and its relation to turbulence*. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology.
- [122] WALEFFE F. (1990) On the three-dimensional instability of strained vortices. *Phys. Fluids A*, **2**(1), 76–80.
- [123] WASOW W. (1985) *Linear Turning Point Theory*. Springer-Verlag.
- [124] WIDNALL S. E. & TSAI C.-Y. (1977) The instability of the thin vortex ring of constant vorticity. *Phil. Trans. R. Soc. London A*, **287**, 273–305.
- [125] WIDNALL S. E., BLISS D. & TSAI C.-Y. (1974) The instability of short waves on a vortex ring. *J. Fluid Mech.*, **66**(1), 35–47.
- [126] ZHANG K., EARNSHAW P., LIAO X. & BUSSE F. H. (2001) On inertial waves in a rotating fluid sphere. *J. Fluid Mech.*, **437**, 103–119.

RÉSUMÉ

Cette thèse porte sur l'instabilité elliptique des écoulements en rotation. Deux exemples d'application ont été envisagés : l'écoulement dans un sillage d'avion et la dynamique du noyau liquide de certaines planètes.

Dans le sillage lointain d'un avion, l'écoulement consiste en deux tourbillons contra-rotatifs. Chaque tourbillon induit un champ de contrainte qui déforme l'autre tourbillon et entraîne sa déstabilisation. Les caractéristiques de cette instabilité sont analysées d'un point de vue théorique et numérique pour différents profils de tourbillon quand un jet axial est présent dans leur cœur.

Le deuxième exemple porte sur la stabilité d'écoulement en rotation dans une sphère déformée en ellipsoïde. La déformation elliptique modélise un effet de marée sur le noyau liquide d'une planète. Les propriétés de stabilité de l'écoulement ont été obtenues par méthodes expérimentale et théorique. Un bon accord a été mis en évidence.

ABSTRACT

This thesis is devoted to the elliptical instability in rotating flows. Two applications have been investigated : flows in air plane wakes and the fluid dynamic of molten inner core of planets.

Far from an aircraft, the flow consists in two counter-rotating vortices. Each vortex induces a strain field which deforms the other vortex and causes its destabilization. The characteristics of this instability are analyzed by theoretical and numerical means for several vortex models when an axial flow is present in their core.

The second example is devoted to the stability of rotating flow in an elliptically deformed sphere. The elliptic deformation mimics the effect of a tide on the liquid core of a planet. The stability properties of the flow have been obtained experimentally and theoretically. A good agreement has been shown.

SPÉCILAITÉ : Systèmes complexes

MOTS-CLÉS : Dynamique des tourbillons, instabilité elliptique, ondes inertielles, sillage d'avion, noyau planétaire, effet de marée

Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Équilibre
CNRS UMR 6594, Université Aix-Marseille I et II
49, rue F. Joliot-Curie, B.P. 146, 13384 MARSEILLE Cedex 13